ANÁLISE ESTRUTURAL I

3ª ed.

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL – ENGENHARIA CIVIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia Civil

Realização:

Programa de Educação Tutorial do Curso de Engenharia Civil
Universidade Federal de Santa Catarina – PET/ECV

Autoras:

Profª Nora Maria de Patta Pillar
Profª Ângela do Valle
Profª Henriette Lebre La Rovere

Integrantes:

Cláudio César Zimmermann (Tutor)
Albert Luiz Follmann
Bruno Teles Cordeiro
Camila Matos de Aquino
Carlos Eduardo Figur
Cristine Buettgen
Davi Werner Benvenuti
Guilherme Estacia Ambros
Henrique Juarez Zandonai
João Pedro Floriano Cena da Silva
Julia Rataichesck Fiates
Júlia Valentina Bonelli
João Victor Hernandes Vianna Lemos Nappi
Mariana Fornara Nohatto
Rafaela Jeffe Mondadori
Valéria Natthalia Voltolini Luz
Valquir Francisco Pacheco Neto
Vitor Cazula Naves
Vitor Schweitzer Thiesen

Mais informações:
pet.ecv.ufsc.br

Programa de Educação Tutorial do Curso de Engenharia Civil
Universidade Federal de Santa Catarina

Sumário

1. Introdução 5
Parâmetros que influenciam a concepção de sistemas estruturais 5
Classificação das peças estruturais quanto à geometria 6
Classificação das peças estruturais quanto às cargas 7
Graus de Liberdade, Estaticidade e Estabilidade 7
Graus de liberdade 7
Vínculos Planos 8
Estaticidade e Estabilidade 9
2. Grau de Estaticidade – GH 11
Grau de conexão do vínculo: 11
3. Treliças Planas 18
Equilíbrio dos Nós: 19
Cremona: 25
4. Reações de apoio segundo as regras de Superposição dos Efeitos 37
1ª Regra: Força concentrada entre apoios 37
2ª Regra: Momento aplicado entre dois apoios 38
3ª Regra: Viga engastada 39
4ª Regra: Força concentrada em balanço 40
5. Esforços em Estruturas 44
Esforços Externos 44
Esforços Internos 45
1ª Situação: 46
2ª Situação: 49
3ª Situação: 52
4ª Situação: 55

Vigas 66
6.Vigas Gerber 71
Desmembramento de vigas gerber 71
Solução de vigas gerber 74
7. Vigas Inclinadas 92
Viga Inclinada com carga pontual 93
Viga inclinada com carga distribuída horizontalmente 97
Viga inclinada com carga distribuída verticalmente 100
Viga inclinada com carga distribuída no próprio eixo 104
8. Pórticos 108
Pórtico com barra inclinada 109
Pórtico com balanço 114
Pórtico Triarticulado 119
9. Cabos 131
Reações de Apoios para Cabos: 133
Esforços Normais de Tração Atuantes em Cabos 137
Conformação Geométrica Final do Cabo: 141
Comprimento total de cabo submetido a carga “q” apenas: 144
10. Grelhas 149
Grelha Engastada e Livre: 151
Grelha Triapoiada: 151
11. Arcos 165
Arcos aplicados em engenharia: 170
Arcos Triarticulados 172
12. Linhas de Influência 177
1° Situação – Viga em Balanço com Engaste à Esquerda 177
2° Situação – Viga em Balanço com Engaste à Direita 179
3° Situação – Viga Bi Apoiada 181
4ª Situação – Viga Simplesmente Apoiada em Balanço 183
Linha de Influência em Viga Gerber 190
Trem-Tipo 198

1. Introdução

Parâmetros que influenciam a concepção de sistemas estruturais

A estrutura é um conjunto formado pelas partes resistentes que garantem a estabilidade de um objeto de projeto, por exemplo, uma edificação. Cada parte da construção, também denominada peça estrutural, deve resistir aos esforços incidentes e transmiti-los a outras peças, através dos vínculos que as unem, com a finalidade de conduzi-los ao solo.

Quando se projeta uma estrutura, a análise do comportamento estrutural exige que sejam feitas algumas simplificações que conduzem a modelos estruturais. A Análise Estrutural determina os esforços e deformações a que as estruturas são submetidas.

Para que se defina o sistema estrutural mais adequado, para uma determinada situação de projeto, devem ser considerados vários fatores. Os principais são:

- Projeto arquitetônico:

  -Aspectos funcionais (dimensão do espaço interno, iluminação, limitações do espaço exterior, etc);

  - Aspectos estéticos (sistemas diferentes geram formas diferentes).

- Carregamento atuante:

  - Permanente;

  - Variável (acidental, efeito do vento).

- Condições de fabricação, transporte e montagem da estrutura (vias de acesso, içamento).

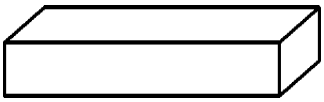
- Material estrutural a ser utilizado (cada material possui características mecânicas peculiares); o material deve estar adequado aos tipos de esforços solicitantes pelas estruturas.

Classificação das peças estruturais quanto à geometria

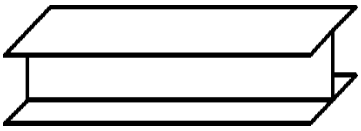
Os sistemas estruturais são modelos de comportamento idealizados para representação a análise de uma estrutura tridimensional. Estes modelos obedecem a uma convenção. Esta convenção pode ser feita em função da geometria das peças estruturais que compõem o conjunto denominado sistema estrutural.

Quanto à geometria, um corpo pode ser identificado por três dimensões principais que definem seu volume. Conforme as relações entre estas dimensões, surgem quatro tipos de peças estruturais:

- Barra: duas dimensões da mesma ordem de grandeza e uma terceira maior que as outras duas.

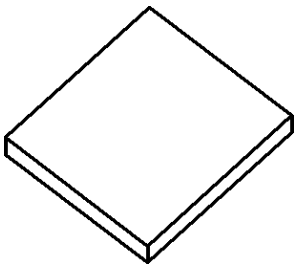


- Barra de elementos delgados: as três dimensões principais são de diferentes ordens de grandeza. É o caso dos perfis metálicos, onde a espessura é muito menor que as dimensões da seção transversal, que é menor que o comprimento da peça. As barras de elementos delgados são tratadas, sob o ponto de vista estrutural, da mesma forma que as barras, exceção feita à solicitação por torção.



- Folhas ou lâminas: duas dimensões de mesma ordem de grandeza, maiores que a terceira dimensão.

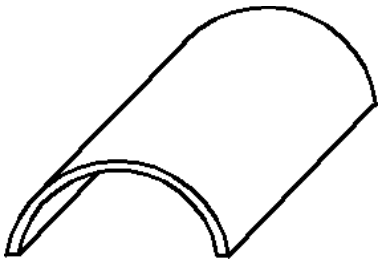
  Subdividem-se em:



  - Placas: carregamento perpendicular ao plano médio;

  - Chapas: carregamento contido no plano médio;

- Cascas: superfície média curva;



- Bloco: as três dimensões são da mesma grandeza.

Classificação das peças estruturais quanto às cargas

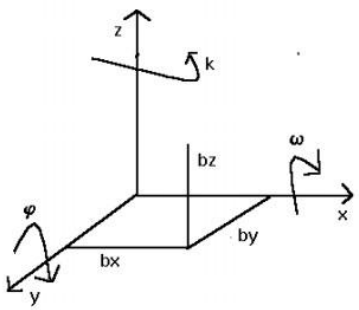
- Tracionadas (cabos): pontes pênseis, pontes estaiadas, tirantes e membranas em cúpulas.
- Comprimidas: pilares, arcos e escoras.
- Treliças: tracionadas e comprimidas.
- De cisalhamento: paredes em edifícios em zonas de sismos e ventos fortes.
- Flexão: vigas, pórticos e lajes.

Graus de Liberdade, Estaticidade e Estabilidade

Graus de liberdade

As estruturas no espaço estão submetidas a uma resultante de um sistema de forças e uma resultante de momentos em um certo ponto. A resultante de forças nessa ponto leva a uma tendência de translação e a resultante de momentos nesse ponto leva a uma tendência de rotação.

A translação pode ocorrer nos três eixos ortogonais bem como a rotação, logo, uma estrutura no espaço possui seis graus de liberdade.



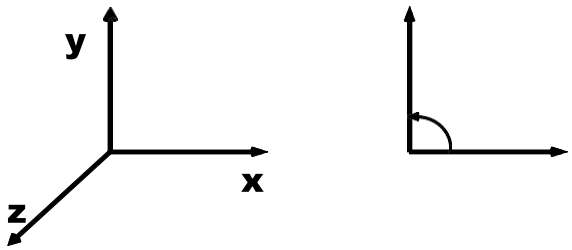
Em uma estrutura, torna-se necessário restringir esses graus de liberdade para se atingir a estabilidade. Os vínculos são os elementos responsáveis por evitar as possíveis tendências de movimento, através de reações contrárias às tendências.

Quando os vínculos ligam os elementos da estrutura entre si são chamados de internos, e quando ligam a estrutura ao meio externo são ditos vínculos externos.

Vínculos Planos

No plano, um corpo rígido qualquer tem três graus de liberdade de movimento: deslocamento em duas direções e rotação.

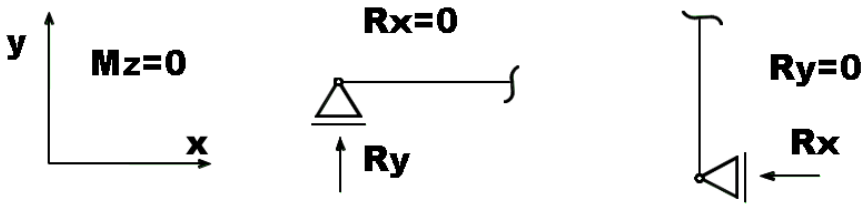
y



Os vínculos são classificados de acordo com o grau de liberdade que permitem (ou do número de movimentos que impedem):

Apoio simples ou de primeiro gênero:

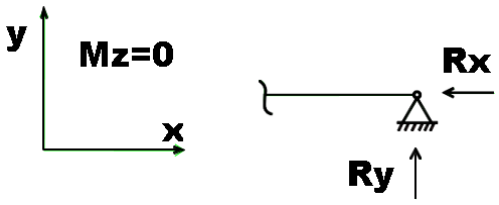
O apoio de primeiro gênero é aquele que impede o deslocamento em apenas uma direção. A reação (R) aparece na direção do movimento impedido.



Exemplo de movimento: rolete de skate.

Articulação, rótula ou apoio do segundo gênero:

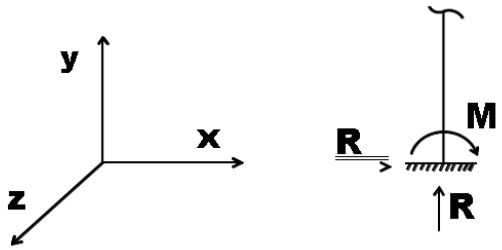
O apoio de segundo gênero impede todas as translações possíveis no plano, ficando a rotação livre. As reações de apoio (R) aparecerão na direção das translações impedidas.



Exemplo de movimento: dobradiça.

Engaste ou apoio de terceiro gênero:

O apoio de terceiro gênero impede todos os movimentos possíveis no plano. Dessa forma, aparecem três reações de apoio: duas referentes aos movimentos de translação (R) e uma ao movimento de rotação (M).



Exemplo de movimento: poste enterrado no solo.

Estaticidade e Estabilidade

Uma estrutura é dita restringida quando possui vínculos para restringir todos os movimentos possíveis da estrutura (translação e rotação). Três casos podem ocorrer na estrutura de acordo com a limitação dos graus de liberdade:

Estruturas Isostáticas: são estruturas com número suficiente de vínculos para garantir sua restrição aos movimentos. Os apoios são dispostos de modo a restringir seu movimento com o número exato de reações necessárias, ou seja, o número de equações de equilíbrio é igual ao número de incógnitas. As estruturas são o objeto de estudo da Análise Estrutural I.

Estruturas Hiperestáticas: são estruturas com vínculos em abundância para garantir sua restrição aos movimentos. Os apoios são dispostos de modo a restringir seu movimento com mais reações do que equações de equilíbrio,

chegando-se a um sistema de equações indeterminado (mais incógnitas que equações).

Estruturas Hipostáticas: são estruturas não restringidas. Os apoios são dispostos de modo que o número de reações é menor do que o número de equações de equilíbrio, ou seja, essa estrutura não possui vínculos suficientes para garantir a estaticidade mínima necessária.

2. Grau de Estaticidade – GH

Uma estrutura é classificada segundo seu grau de estaticidade (GH) no plano das maiores ações, uma quantificação do quão estável a estrutura é no plano através da análise de seus vínculos internos e externos.

Quando:

- GH = 0 → Estrutura Isostática;
- GH > 0 → Estrutura Hiperestática;
- GH < 0 → Estrutura Hipostática.

O grau de estaticidade pode ser calculado através da fórmula:

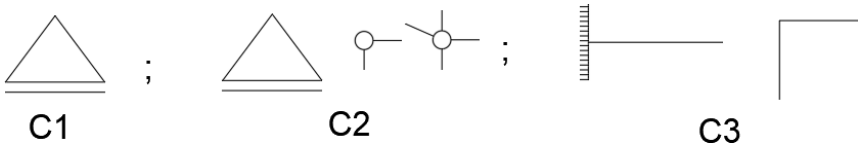
$$\mathbf{GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M}$$

Onde:

- C_1 = grau de conexão dos vínculos de 1ª classe;
- C_2 = grau de conexão dos vínculos de 2ª classe;
- C_3 = grau de conexão dos vínculos de 3ª classe;
- M = número de hastes presentes na estrutura.

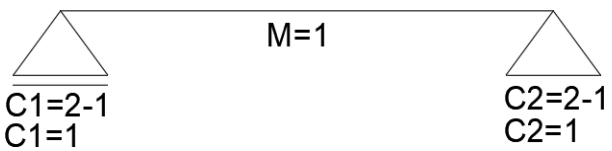
Grau de conexão do vínculo:

Número de barras que concorrem no vínculo – 1



Exemplos:

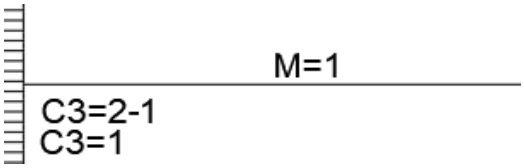
1.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3.1$$
$$GH = 0$$

Estrutura Isostática e Restringida

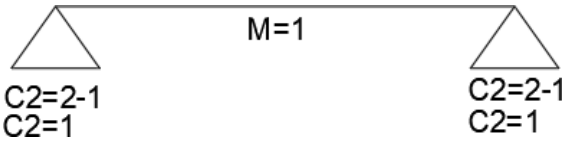
2.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.0 + 2.0 + 3.1 - 3.1$$
$$GH = 0$$

Estrutura Isostática e Restringida

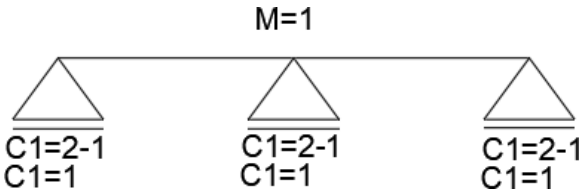
3.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.0 + 2.(1 + 1) + 3.0 - 3.1$$
$$GH = 1$$

Estrutura 1x Hiperestática e Restringida

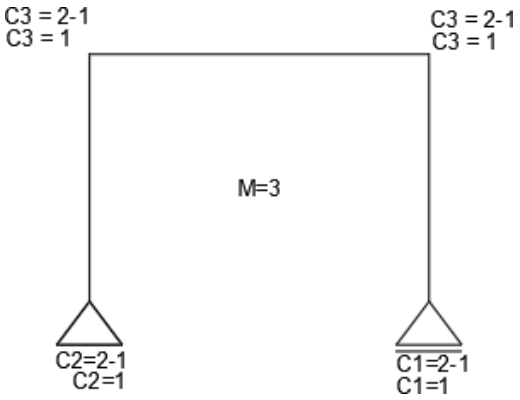
4.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.(1 + 1 + 1) + 2.0 + 3.0 - 3.1$$
$$GH = 0$$

OBS: Note que apesar da estrutura apresenta grau de estaticidade igual a zero, ela não possui restrição ao movimento de translação no eixo Y, tornando-se não restringida, portanto hipostática.

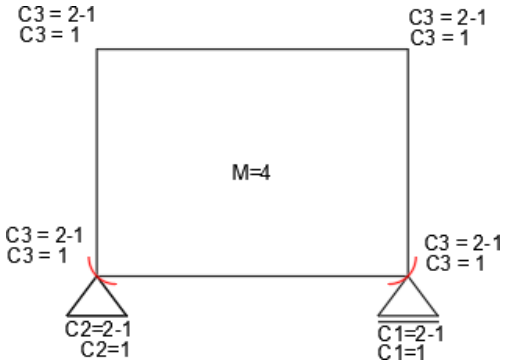
5.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.1 + 2.1 + 3.(1 + 1) - 3.3$$
$$GH = 0$$

Estrutura Isostática e Restringida

6.



$$GH = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3M$$
$$GH = 1.1 + 2.1 + 3.(1 + 1 + 1 + 1) - 3.4$$
$$GH = 3$$

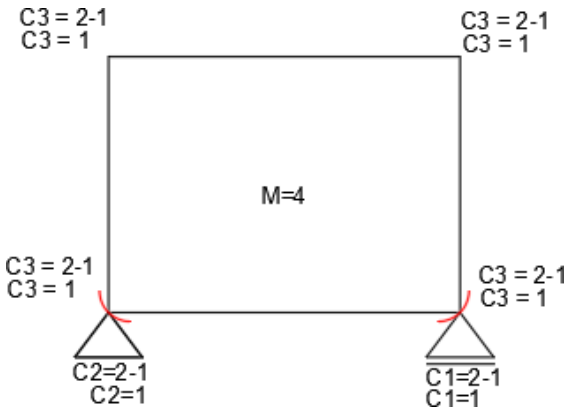
Nos exemplos 5 e 6 existe a presença não só de vínculos externos, mas também a atuação dos vínculos internos. Nesses casos, podemos definir o grau de estaticidade externa (GE) e o Grau de Estaticidade Interna (GI). Sendo:

$$GH = GE + GI$$

Onde:

- GE = Grau de estaticidade externa $(C_1 + 2.C_2 + 3C_3 - 3)$;
- GI = Grau de estaticidade interna $(3Q - C_1 - C_2)$;
- Q = Quadros.

7.



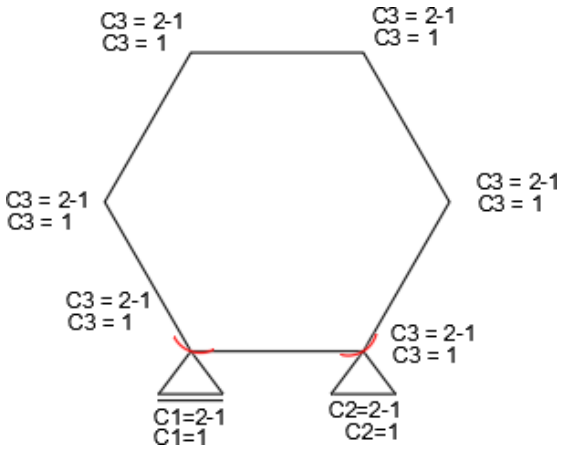
$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.1 - 0 - 0$$
$$GE = 3$$

$$GH = GE + GI$$
$$GH = 3x \text{ Hiperestática e Restringida}$$

OBS: Um tipo especial de pórtico é a viga Vierendeel, exemplificada na figura anterior. A viga Vierendeel constitui um painel retangular formado por barras engastadas ortogonalmente.

8.



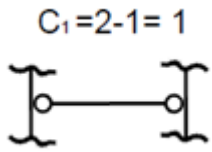
$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.1 - 0 - 0$$
$$GE = 3$$

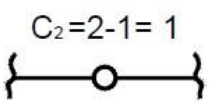
$$GH = GE + GI$$
$$GH = 3x \text{ Hiperestática e Restringida}$$

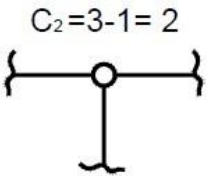
OBS: O GI de uma estrutura fechada é igual a 3, independentemente de sua forma geométrica. Entretanto, quando há uma rótula interna, ela diminui o GH no valor do seu respectivo grau de conexão (exemplos 9 e 10).

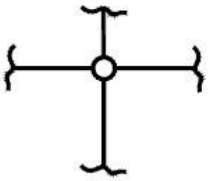
Tirante (C_1):



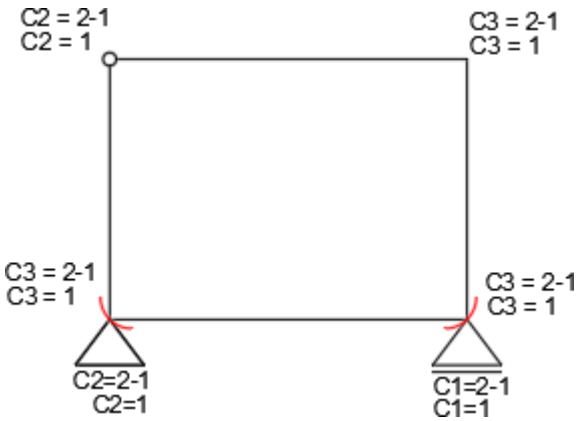
Articulação ou Rótula (C_2):







9.

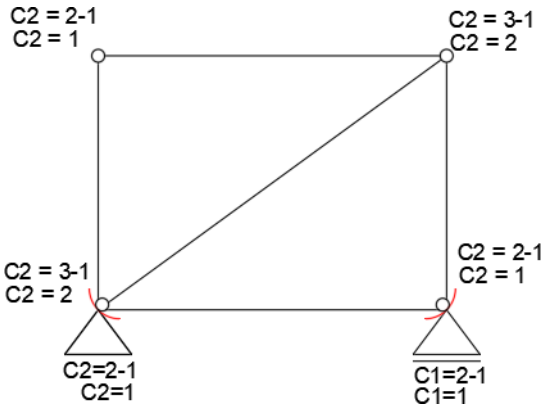


$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.1 - 0 - 1$$
$$GE = 2$$

$$GH = GE + GI$$
$$GH = 2x \text{ Hiperestática e Restringida}$$

10,

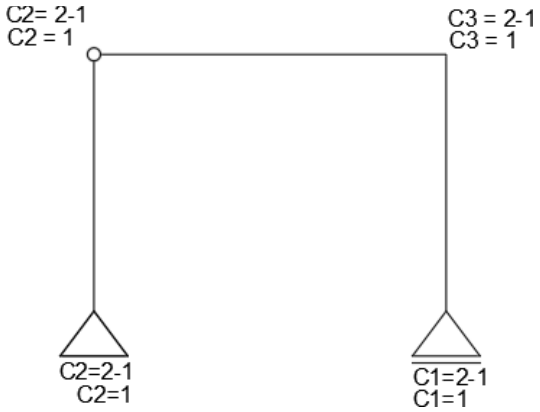


$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.2 - 0 - (1 + 2 + 2 + 1)$$
$$GE = 0$$

$$GH = GE + GI$$

11.



$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

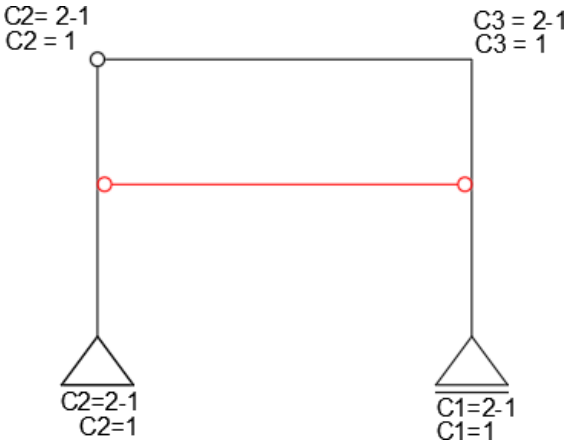
$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.0 - 0 - 1$$
$$GE = -1$$

$$GH = GE + GI$$
$$GH = -1$$

Hipostática e Não Restringida

Os tirantes são elementos lineares capazes de transmitir esforços de tração entre suas extremidades. Nessa estrutura, irá impedir o deslocamento no plano, somando +1 no GI e tornando a estrutura estável.

12.



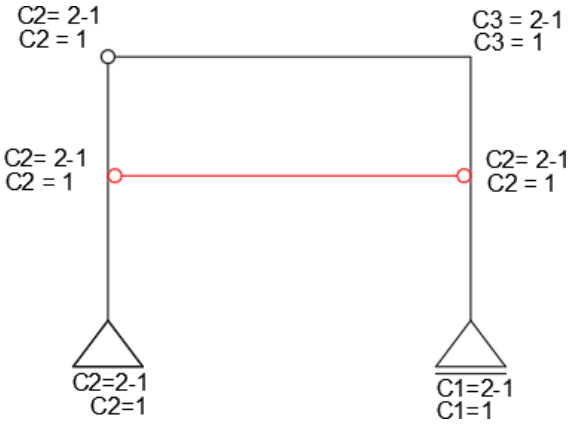
$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.0 - 0 - (1 + 1 + 1)$$
$$GE = 0$$

$$GH = GE + GI$$
$$GH = 0$$

Isostática e Restringida

Considerando o tirante como um vínculo interno de primeira classe adicional de equilíbrio interno de primeira classe:



$$GE = 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3$$
$$GE = 1.1 + 2.1 + 3.0 - 3$$
$$GE = 0$$

$$GI = 3Q - C_1 - C_2$$
$$GE = 3.1 - 0 - (1 + 1 + 1)$$
$$GE = 0$$

$$GH = GE + GI$$
$$GH = 0$$

Outra forma de verificar o grau de estabilidade de uma estrutura (GH) é avaliar os vínculos e as equações disponíveis que incidem sobre ela, sendo:

$$\mathbf{G = X - E}$$

Onde:

X = número de incógnitas (reações de apoio);

E = número de equações de equilíbrio.

As equações de equilíbrio no plano são: $\Sigma F_X = 0$; $\Sigma F_Y = 0$; $\Sigma M_Z = 0$.

- Toda vez que adicionarmos rótulas internas em uma estrutura, teremos equações de equilíbrio adicionais (E), tantas quantas forem o grau C_2 das rótulas internas.
- Sempre que a estrutura apresentar um quadro, serão acrescentadas 3 reações internas adicionais tantas quantas forem os graus C_3

Exemplos:

1.

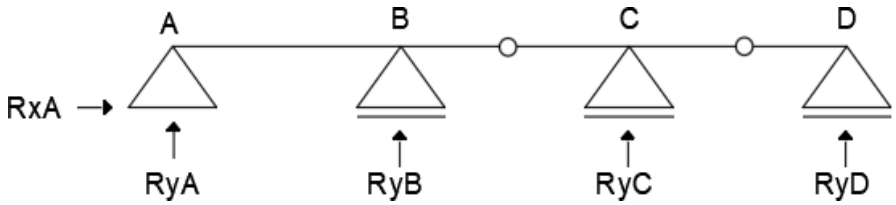
Reações em A = 1
Reações em B = 2
Reações (X) = 3

Equações de Equilíbrio (E) = 3

G = X − E
G = 3 − 3

Isostática e Restringida

2.

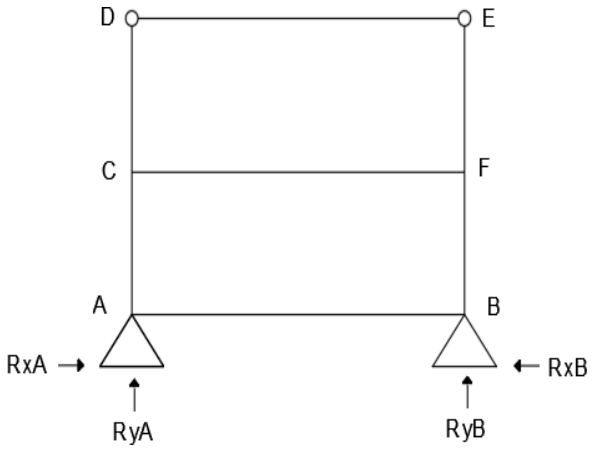


Reações em A = 2
Reações em B = 1
Reações em C = 1
Reações em D = 1
Reações (X) = 5

Equações de Equilíbrio = 3
Rótula Interna $C_2 = 1$
Rótula Interna $C_2 = 1$
Equações de Equilíbrio (E) = 5

G = X – 5
G = 5 – 5
G = 0
Isostática e Restringida

3.



3. Treliças Planas

Essas estruturas tem grande presença nas construções. Sua aplicação vem desde telhados, pontes, torres para linha de transmissão. São formadas por barras ligadas através de nós rotulados. As forças aplicadas nas treliças devem ser aplicadas nos nós. Com essa característica, a estrutura pode ser formada, conforme a necessidade da treliça. De acordo com a utilização das treliças as barras podem mudar de posição e uma nova composição é formada.

Classificação quanto ao equilíbrio estático:

Sejam as variáveis b = número de barras, r = número de reações, n = número de nós.

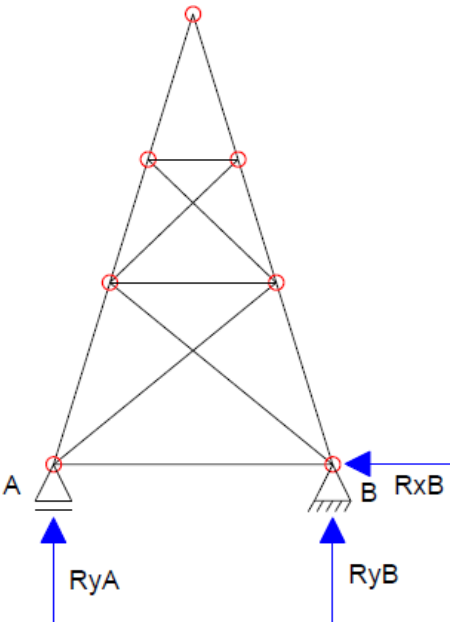
Em cada nó tem-se dois movimentos impedidos internamente , d=2 no caso bidimensional, por isso o número de movimentos impedidos internamente em cada nó é $d \times n$ onde d=2 e n é o número de nós da treliça.

Desta forma podemos classificar as treliças como segue:

$b + r < 2 \times n$ ou deslocável → **Hipostática**
$b + r = 2 \times n$ e indeslocável → **Isostática**
$b + r > 2 \times n$ e indeslocável → **Hiperestática**

Exemplos:

1. Classifique a estrutura:



Número de reações: $\mathbf{r = 3}$
Número de barras: $\mathbf{b = 13}$
Número de nós: $\mathbf{n = 7}$

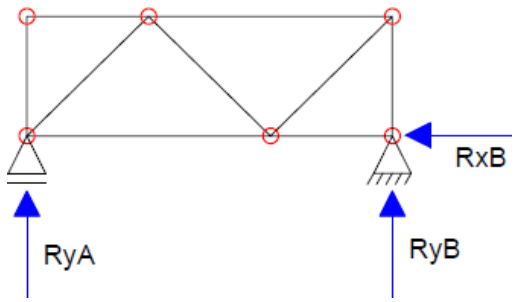
$b + r = 13 + 3 = 19$
$2 \times n = 2 \times 7 = 14$
$19 > 14$: restringida

Classificação: **5x Hiperestática**

Hastes cruzadas indicam treliças hiperestáticas

Perceba que em alguns casos as barras podem se cruzar e não apresentarem ligações (nós) entre si, sem transmissão de carga alguma. Por isso, os nós devem ser indicados no caso de haverem situações como esta.

2.



Número de reações: $\mathbf{r = 3}$
Número de barras: $\mathbf{b = 9}$
Número de nós: $\mathbf{n = 6}$

$$b + r = 9 + 3 = 12$$
$$2 \times n = 2 \times 6 = 12$$
$12 = 12$: restringida

Classificação: **Isostática**

Métodos de obtenção dos esforços internos:

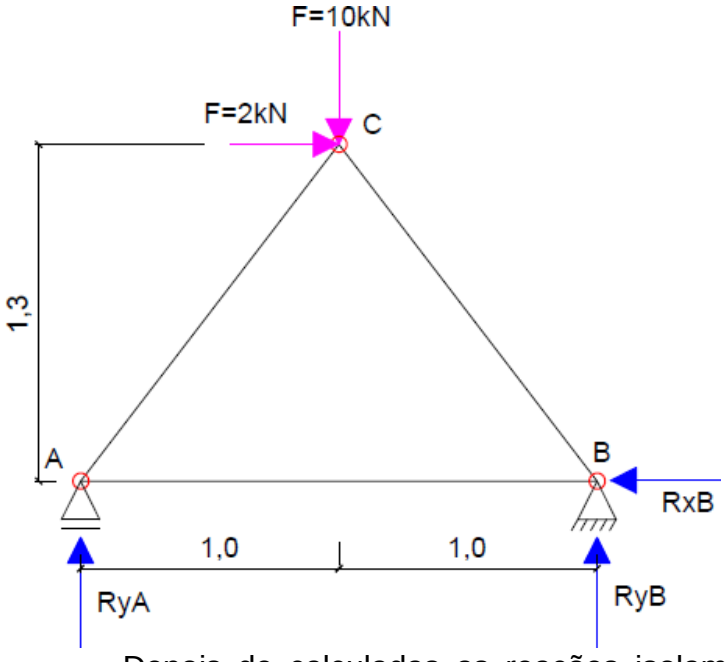
Equilíbrio dos Nós:

Neste método de resolução é analisado cada nó separadamente. Como a estrutura é estática, são utilizadas as equações de equilíbrio em cada nó da estrutura. Para análise inicial consideramos que a força normal é de tração. Assim, se o resultado for negativo, saberemos que a força será de compressão.

Ao iniciar o problema é necessário calcular as reações externas e em seguida verificar qual nó possui número de incógnitas menor para obter os esforços internos normais ou axiais em suas hastes.

Exemplos:

1. Calcule os esforços internos da treliça abaixo.



Reações:

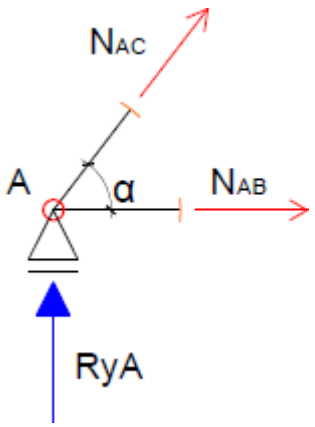
$$\Sigma M_B = 0$$
$$10 \times 1 - R_{YA} \times 2 - 2 \times 1{,}3 = 0$$
$$10 - R_{YA} \times 2 - 2{,}6 = 0$$
$$R_{YA} = \frac{7{,}4}{2} = 3{,}7\text{kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$
$$R_{YA} + R_{YB} - 10 = 0$$
$$R_{YB} = 10 - 3{,}7 = 6{,}3\text{kN}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$-R_{XB} + 2 = 0$$
$$R_{XB} = 2\text{kN}$$

Depois de calculadas as reações isolamos os nós até encontrarmos todas as reações.

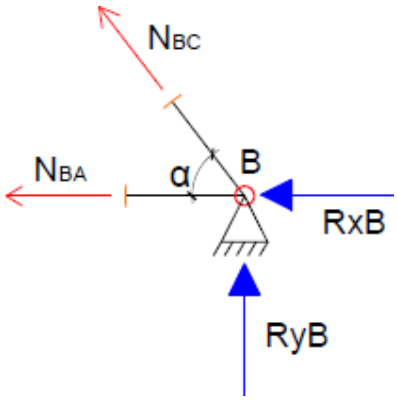
Nó A:



$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1{,}3}{1} = 52{,}43°$$
$$\Sigma F_Y = 0$$
$$R_{YA} + N_{AC} \times \sin\alpha = 0$$
$$N_{AC} = -\frac{R_{YA}}{\sin\alpha} = -\frac{3{,}7}{0{,}793} = -4{,}67\text{kN}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$N_{AC} \times \cos\alpha + N_{AB} = 0$$
$$-4{,}67 \times 0{,}610 + N_{AB} = 0$$
$$N_{AB} = 4{,}67 \times 0{,}610 = 2{,}85\text{kN}$$

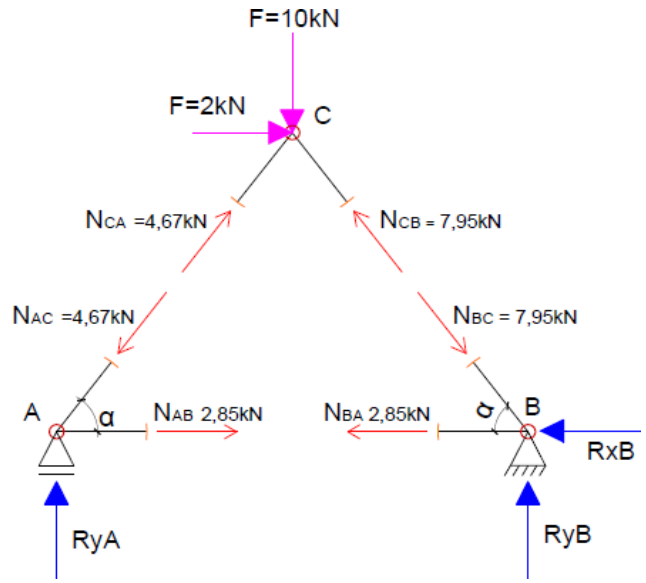
Nó B:

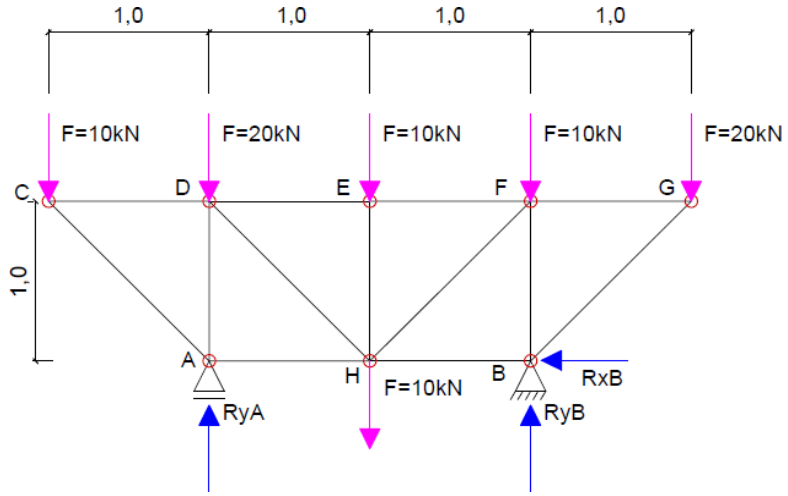


$$\alpha = \tan^{-1}\frac{13{,}1}{1}$$
$$\Sigma F_Y = 0$$
$$R_{YB} + N_{BC} \times \sin\alpha = 0$$
$$N_{BC} = -\frac{R_{YB}}{\sin\alpha} = -\frac{6{,}3}{0{,}793}$$

As forças N_{BC} e N_{AC} apresentaram resultados negativos, isso quer dizer que o sentido que foi arbitrado, como se os esforços estivessem tracionando a barra, estão equivocados. Na realidade nestes casos a barra está submetida a esforços de compressão.

Os esforços internos estão dispostos no desenho a seguir:





Reações:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$$

$$-10 \times 1 + R_{YB} \times 2 + 10 \times 1 - 10 \times 1 - 10 \times 2 - 20 \times 30 = 0$$

$$R_{YB} = \frac{90}{2} = 45\text{kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} + R_{YB} - 10 - 20 - 10 - 10 - 20 - 10 = 0$$

$$R_{YA} = 80 - 45 = 35\text{kN}$$

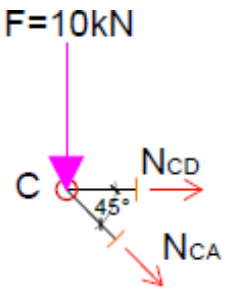
$$\Sigma F_X = 0$$

$$-R_{XB} = 0$$

Após calculadas as reações, analisaremos cada nó separadamente e calcularemos os esforços internos. É preciso ter atenção ao escolher os nós. Como são duas equações de equilíbrio, cada nó deve ter apenas duas incógnitas. Por isso escolhemos o nó C para iniciar, mas poderíamos ter

escolhido também o nó G pelo mesmo motivo. À medida que as forças internas são calculadas, outros nós poderão ser escolhidos.

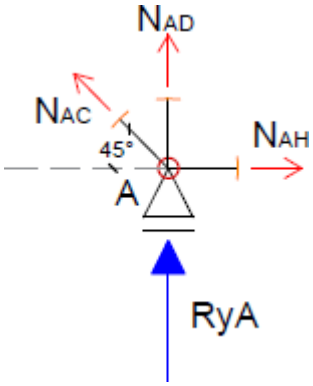
Nó C:



$$\Sigma F_Y = 0$$
$$-10 - N_{CA}\sin 45° = 0$$
$$N_{CA} = -\frac{10}{\sin 45°} = -\frac{10}{0{,}707}$$
$$= -14{,}14\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{CA} = -14{,}1kN}$$
$$N_{CA} = N_{AC}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$N_{CD} + N_{CA}\cos 45° = 0$$
$$N_{CD} + (-14{,}1)\cos 45° = 0$$
$$\mathbf{N_{CD} = 10kN}$$
$$N_{CD} = N_{DC}$$

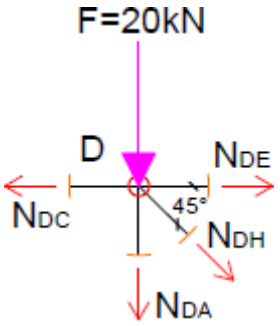
Nó A:



$$\Sigma F_Y = 0$$
$$R_{YA} + N_{AD} + N_{AC}\sin 45° = 0$$
$$N_{AD} = -35 - (-14{,}1)\sin 45°$$
$$= -25\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{CA} = -25kN}$$
$$N_{AD} = N_{DA}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$N_{AH} - N_{AC}\cos 45° = 0$$
$$N_{AH} = N_{AC}\cos 45°$$
$$N_{AH} = (-14{,}1)\cos 45° = -10\text{kN}$$

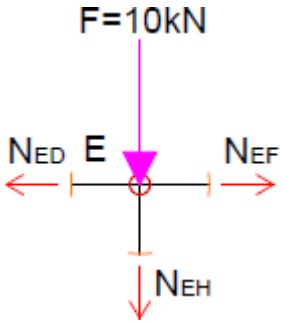
Nó D:



$$\Sigma F_Y = 0$$
$$-20 - N_{DA} - N_{DH}\sin 45° = 0$$
$$-N_{DH} = \frac{20 + N_{DA}}{\sin 45°} = \frac{20 + (-25)}{0{,}707}$$
$$= -7{,}07\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{DH} = -7,1kN}$$
$$N_{DH} = N_{HD}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$-N_{DC} + N_{DH}\cos 45° + N_{DE} = 0$$
$$N_{DE} = N_{DC} - N_{DH}\cos 45°$$
$$N_{DE} = 10 - 7{,}1\cos 45° = 5\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{AH} = 5kN}$$
$$N_{DE} = N_{ED}$$

Nó E:

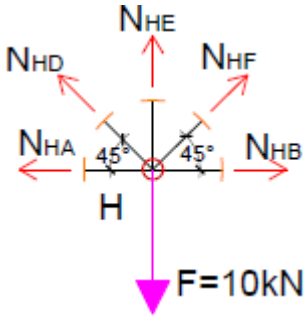


$$\Sigma F_Y = 0$$
$$-10 - N_{EH} = 0$$
$$\mathbf{N_{EH} = -10kN}$$
$$N_{EH} = N_{HE}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$-N_{ED} + N_{EF} = 0$$
$$N_{EF} = N_{ED} = 5\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{EF} = 5kN}$$
$$N_{EF} = N_{FE}$$

Nó H:

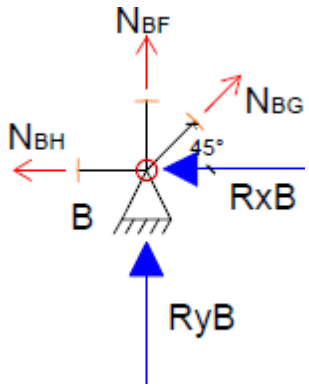
Nó B:



$$\Sigma F_Y = 0$$
$$-10 + N_{HE} + N_{HF}\sin 45° + N_{HD}\sin 45° = 0$$
$$N_{HF} = \frac{10 - N_{HE} - N_{HD}\sin 45°}{\sin 45°}$$
$$N_{HF} = \frac{10 - (-10) - 7{,}1\sin 45°}{\sin 45°}$$
$$N_{HF} = \frac{10 + 10 - 7{,}1\sin 45°}{\sin 45°}$$
$$\mathbf{N_{HF} = 21,2\ kN}$$
$$N_{HF} = N_{FH}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$N_{HB} + N_{HF}\cos 45° - N_{HD}\cos 45° - N_{HA} = 0$$
$$N_{HB} = -N_{HF}\cos 45° + N_{HD}\cos 45° + N_{HA}$$
$$N_{HB} = -21{,}2\cos 45° + 7{,}1\cos 45° - 10$$
$$= -20\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{HB} = -20kN}$$
$$N_{HB} = N_{BH}$$

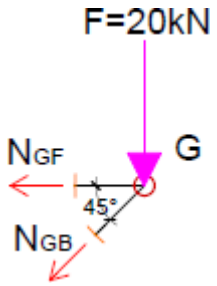
Nó B:



$$\Sigma F_Y = 0$$
$$-N_{BH} + N_{BG}\cos 45° - R_{BX} = 0$$
$$N_{BG} = \frac{N_{BH} + R_{BX}}{\cos 45°} = \frac{-20 + 0}{0{,}707}$$
$$= -28{,}3kN$$
$$\mathbf{N_{BG} = -28{,}2\ kN}$$
$$N_{BG} = N_{GB}$$

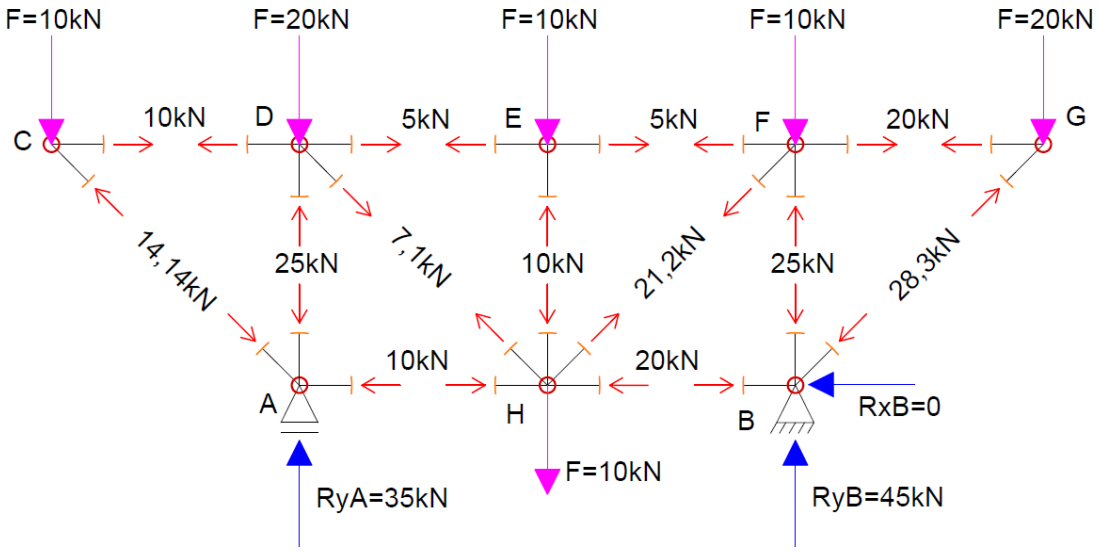
$$\Sigma F_X = 0$$
$$R_{YB} + N_{BF} + N_{BG}\sin 45° = 0$$
$$N_{BF} = -45 - (-28{,}3)\sin 45°$$
$$N_{BF} = -45 + 28{,}3\sin 45° = -25\text{kN}$$
$$\mathbf{N_{BF} = -25kN}$$
$$N_{BF} = N_{FB}$$

Nó G:



$$\Sigma F_X = 0$$
$$-N_{GF} - N_{GB}\cos 45° = 0$$
$$N_{GF} = -N_{GB}\cos 45°$$
$$= -(-28{,}3)\cos 45°$$
$$\mathbf{N_{GF} = 20kN}$$
$$N_{GF} = N_{FG}$$

Os resultados calculados neste exemplo são apresentados no desenho seguinte:

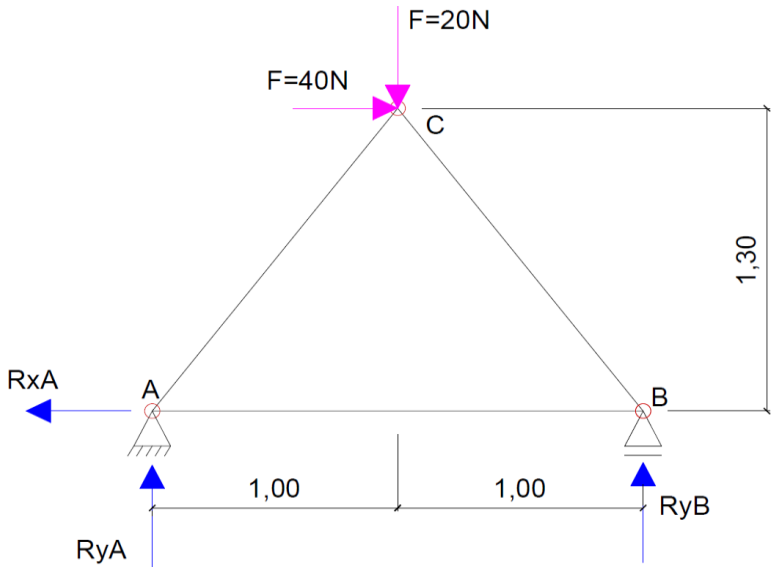


Cremona:

Este método de resolução de treliças utiliza a forma gráfica. Através do equilíbrio gráfico dos vetores concorrentes nos nós é possível saber as forças internas da treliça. Dessa forma, é preciso que as forças estejam em escala e que se tenha precisão de ângulos. Neste método é analisado nó a nó e deve se começar pelo nó com até duas forças desconhecidas. Como nos nós das treliças as forças resultantes são zero, o desenho final deve ser um polígono fechado de vetores, ou seja, a origem do 1º vetor deve coincidir com a flecha do último vetor.

Exemplo:

1. Calcule as forças internas da treliça indicada abaixo pelo método de Cremona.



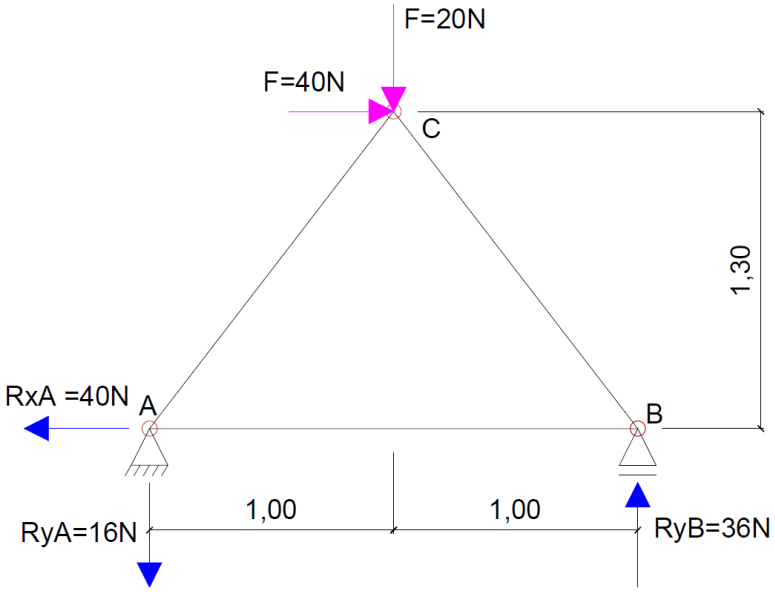
Cálculo das Reações:

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$$
$$-40 \times 1{,}3 - 20 \times 1 + R_{YB} \times 2{,}0 = 0$$
$$R_{YB} = \frac{40 \times 1{,}3 + 20 \times 1}{2{,}0} = 36N$$
$$\mathbf{R_{YB} = 36N}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$
$$R_{YA} + R_{YB} = 20$$
$$R_{YA} = 20 - 36 = -16N$$
$$\mathbf{R_{YA} = -36N}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$\mathbf{R_{XA} = -40N}$$

Os resultados estão dispostos a seguir:



Passos para resolução da treliça:

Escolha um nó que possua até duas incógnitas. No caso desta treliça, todos os nós só possuem duas forças desconhecidas, então se optou pelo nó A.

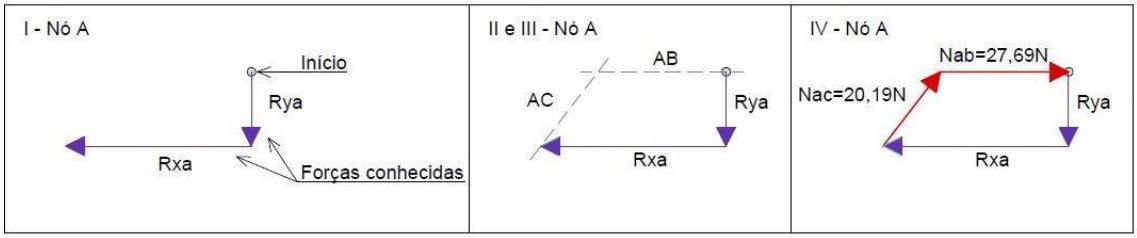
1. Adotar uma escala para todo o problema.

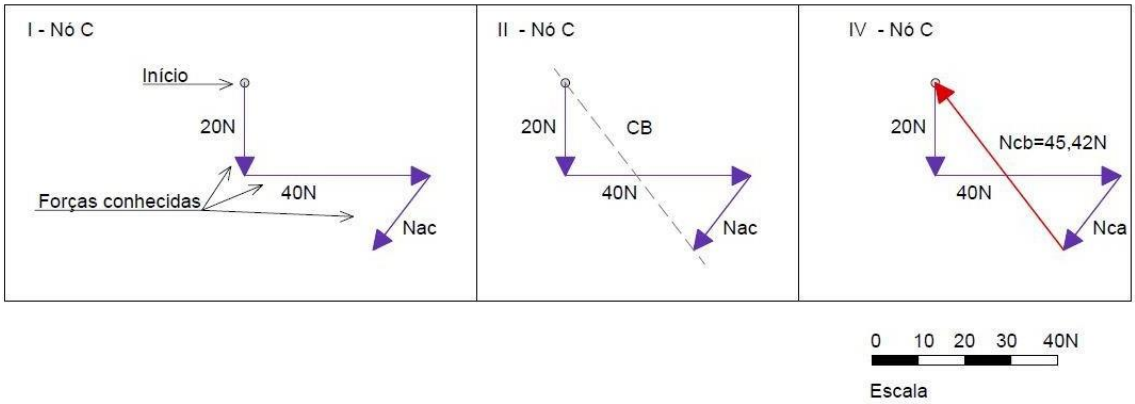
2. Colocar as forças que estão aplicadas no nó em escala, direção e sentido iguais ao da treliça. Escolher uma força para começar e no final desta força aplicar as demais sucessivamente. Uma sugestão é colocar as forças seguindo o sentido horário para que nenhuma seja esquecida.

3. Traçar uma linha mestra na direção da barra que se quer descobrir a força interna no local onde se desenhou a última força conhecida.

4. Continuar traçando as linhas mestras até que todas as barras estejam representadas e que se chegue novamente no ponto de início. No caso do exemplo, sabemos que devemos fechar o polígono, então traçamos a reta AB na direção da barra AB passando pelo ponto de início do polígono.

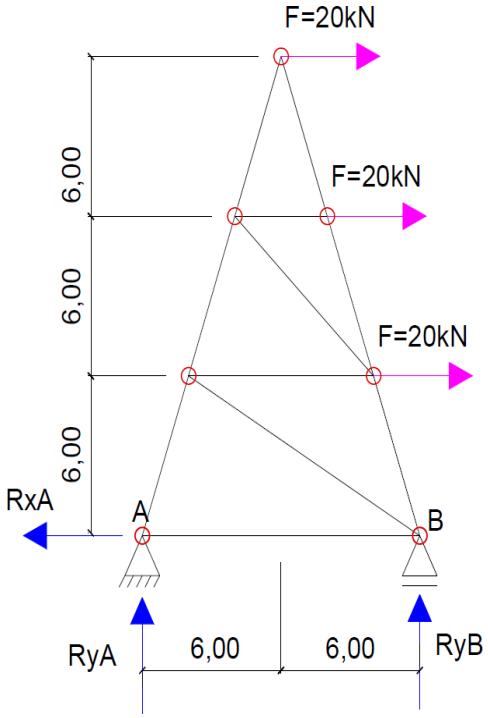
5. Traçar as forças e medir seus tamanhos. A força terá o valor medido de acordo com a escala. Por isso é importante que os ângulos e a escala estejam corretos já que o resultado depende da habilidade de quem desenha.





Exemplo:

2. Resolva as forças internas da treliça segundo o método de Cremona.



Cálculo das Reações:

$$\circlearrowleft \Sigma M = 0$$

$$-20 \times 6 - 20 \times 12 - 20 \times 18 + R_{YB} \times 12 = 0$$

$$R_{YB} = \frac{20 \times (6 + 12 + 18)}{12} = 60kN$$

$$\mathbf{R_{YB} = 60kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

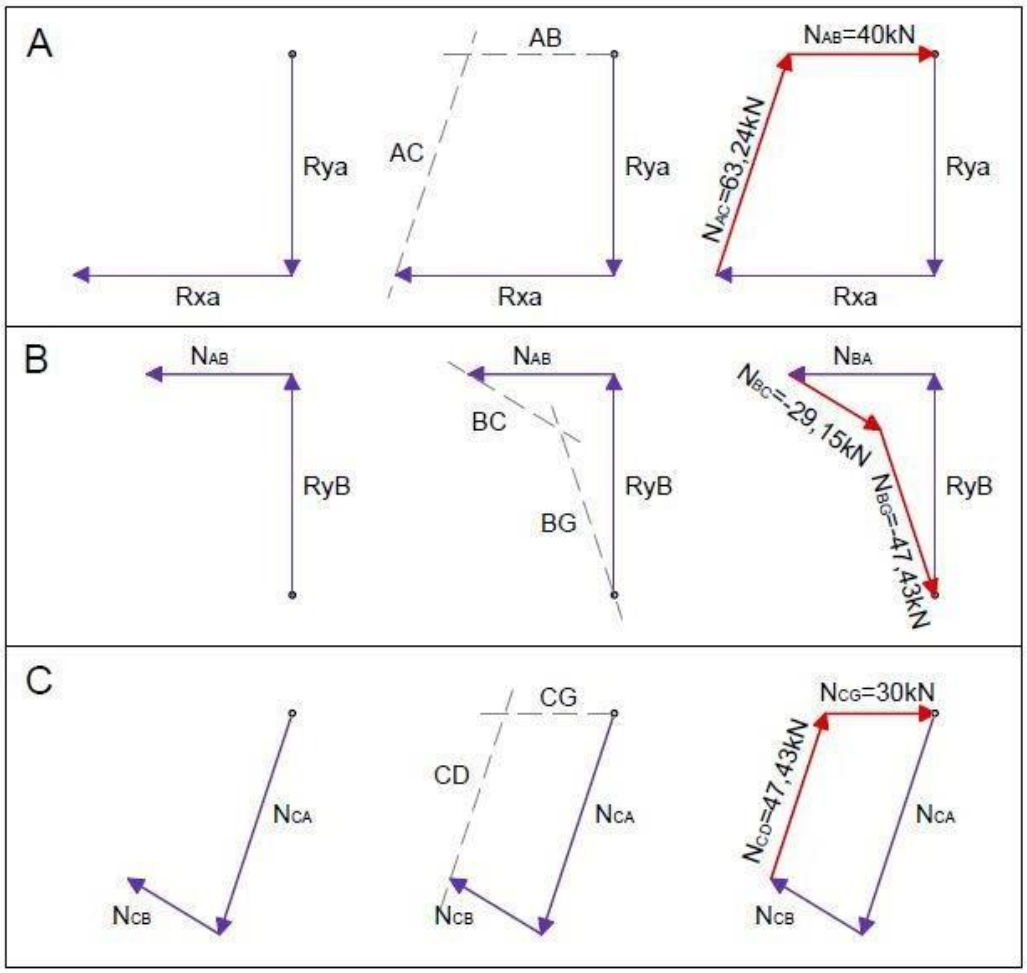
$$R_{YA} + R_{YB} = 0$$

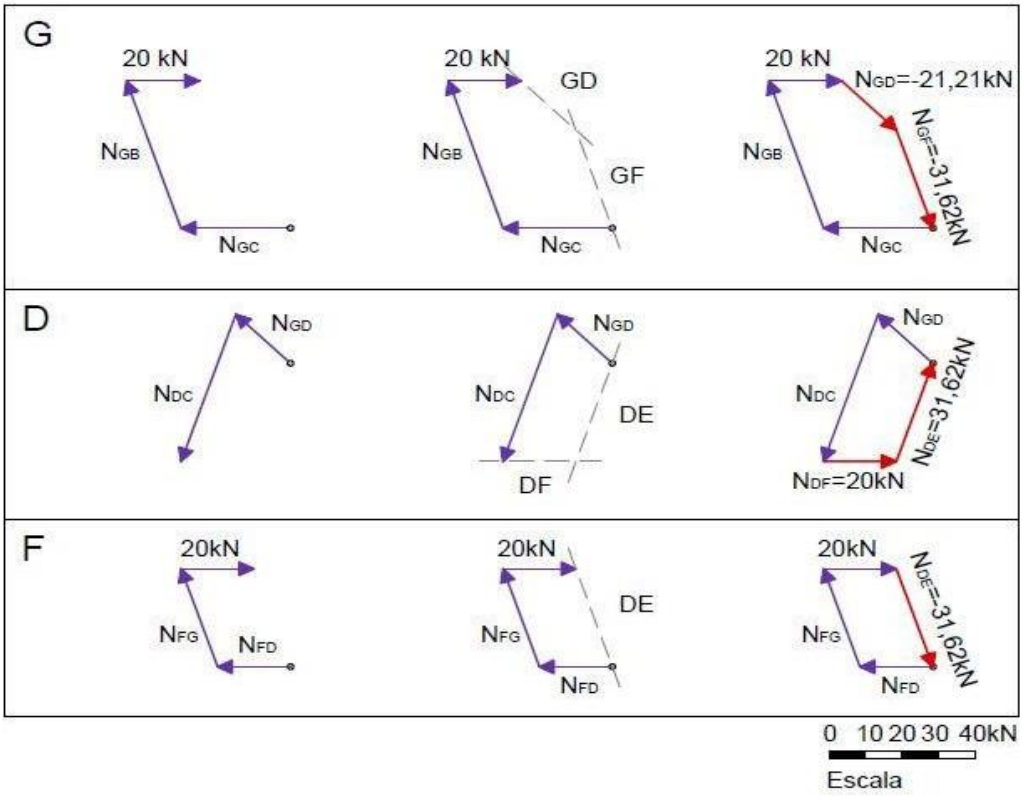
$$\mathbf{R_{YA} = -60kN}$$

$$\Sigma F_X = 0$$

$$\mathbf{R_{XA} = -60kN}$$

As resoluções estão desenhadas a seguir de acordo com os nós. Foram seguidos os passos do exemplo 1.


A
Rya
Rxa
AB
AC
Rya
Rxa
NAB=40kN
NAC=63,24kN
Rya
Rxa
B
NAB
RyB
NAB
BC
RyB
BG
NBA
NBC=-29,15kN
NBG=-47,43kN
RyB
C
NCA
NCB
CG
CD
NCA
NCB
NCG=30kN
NCD=47,43kN
NCA
NCB

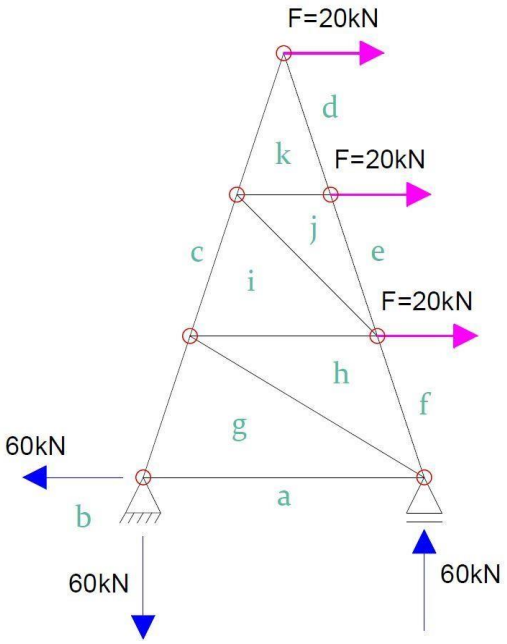

G
20 kN
NGB
NGC
20 kN
GD
NGB
GF
NGC
20 kN
NGD=-21,21kN
NGF=-31,62kN
NGB
NGC
D
NGD
NDC
NGD
NDC
DE
DF
NGD
NDC
NDE=31,62kN
NDF=20kN
F
20kN
NFG
NFD
20kN
DE
NFG
NFD
20kN
NDE=-31,62kN
NFG
NFD
0 10 20 30 40kN
Escala

Notação Bow:

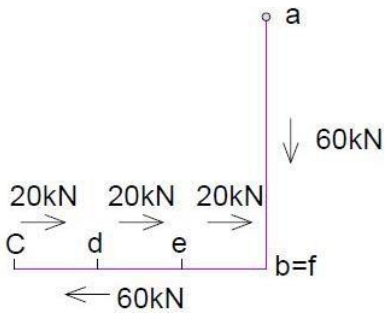
É uma forma de notação da treliça que permite que através de um único gráfico se resolva a treliça. Para usar esta notação devemos marcar com letras os espaços compreendidos entre forças e as forças serão indicadas pelas duas letras que ficarão entre elas.

Primeiro busque traçar as forças que já são conhecidas. Para encontrar as forças internas trace paralelas às barras nos pontos que você deseja encontrar; preferencialmente começar por aquelas com dois pontos conhecidos e encontrar o outro ponto pela intersecção de duas retas.

Seja a treliça do exemplo anterior:



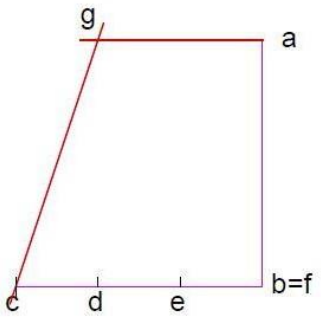
Escala usada nos gráficos:



Vamos iniciar pelas forças conhecidas. Pela escala fazemos o gráfico **ab** de 60kN segundo direção, sentido e intensidade da força. Após isso, traçamos **bc** de 60kN para a esquerda.

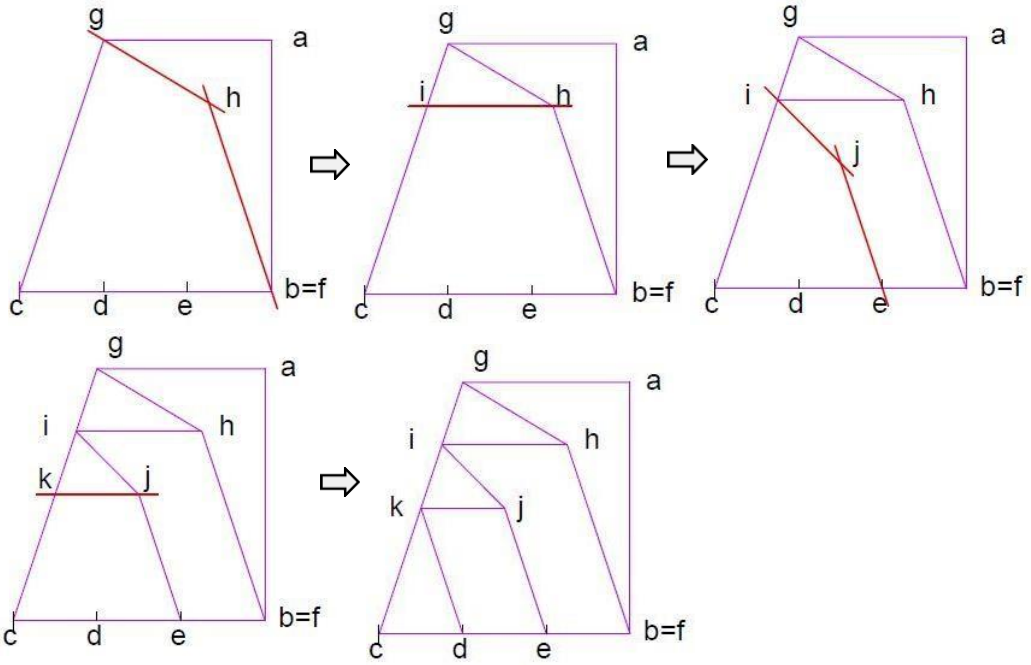
A partir do ponto c temos as forças **cd**, **de** e **ef** de 20kN. Dessa forma, voltamos ao ponto **b**, por isso **b=f**.

Para descobrirmos a próxima letra devemos analisar a estrutura e os pontos que já são conhecidos.



Com os dados iniciais, podemos encontrar o ponto **g**. Para isso, traçamos uma reta paralela à reta **cg** que passa pelo ponto **c**, e novamente uma reta paralela **ag** que passa pelo ponto **a**. A intersecção dessas duas retas dará então o ponto **g**.

O comprimento das retas representam a intensidade das respectivas forças internas das barras da treliça.



Com a notação de Bow a resolução pelo método gráfico se torna mais simplificada, já que é preciso desenhar apenas uma vez o gráfico.

Seções de Ritter:

Este método é mais utilizado quando se quer conhecer determinados esforços das barras, verificar esforços em estruturas construídas. Inicialmente secciona-se a estrutura de modo que se obtenha as forças desejadas dessa seção, resultando duas partes da treliça; através delas poderão ser encontradas as forças desejadas. É importante lembrar que a seção não pode cortar mais do que três barras para que não se tenha mais incógnitas do que equações; estas três barras não podem ser concorrentes e paralelas entre si.

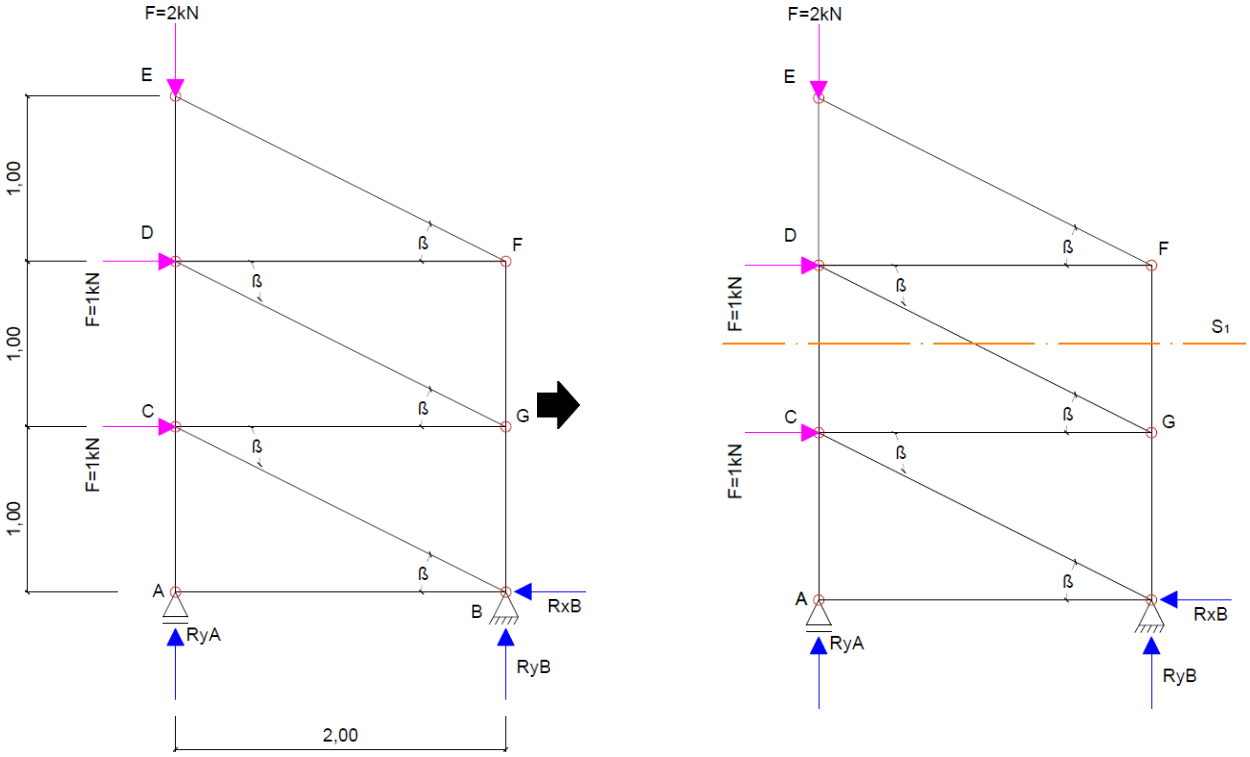
Para resolver basta usarmos as equações de equilíbrio em uma das partes da seção. A escolha vai depender do calculista. Geralmente utiliza-se a seção mais simples, que necessite de menos cálculos iniciais.

Neste método é usual utilizarmos uma equação de equilíbrio de translação e duas equações de equilíbrio de momentos convenientemente escolhidas, de forma a resolver mais fácil e rapidamente os esforços nas hastes seccionadas.

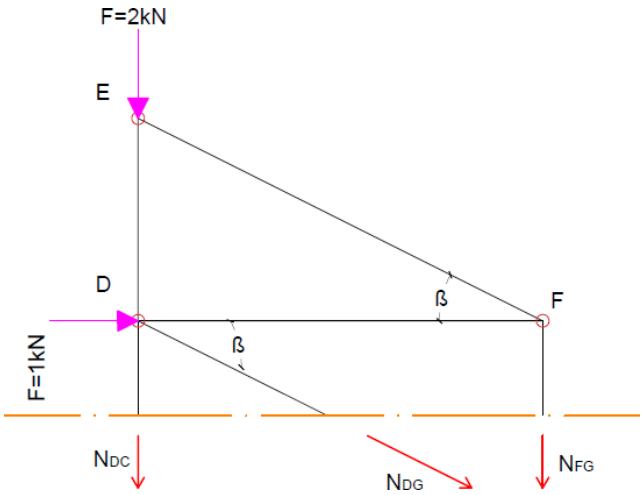
Este método é apropriado para treliças com altura ou comprimento constante (treliças tipo Shadi).

Exemplos:

1. Considere a treliça a seguir:



Suponha que se deseja descobrir o esforço interno nas barras N_{GD}, N_{CD}, N_{GF}. Ao observar a estrutura é necessário verificar a melhor forma de obter esses resultados. No caso do exemplo a seção passa entre a barra CD até GF permitirá que se obtenha essas informações. Ao cortarmos a estrutura escolhemos a parte superior por ser a mais simples. Para os cálculos arbitra-se como tração, como no método de isolamento dos nós.



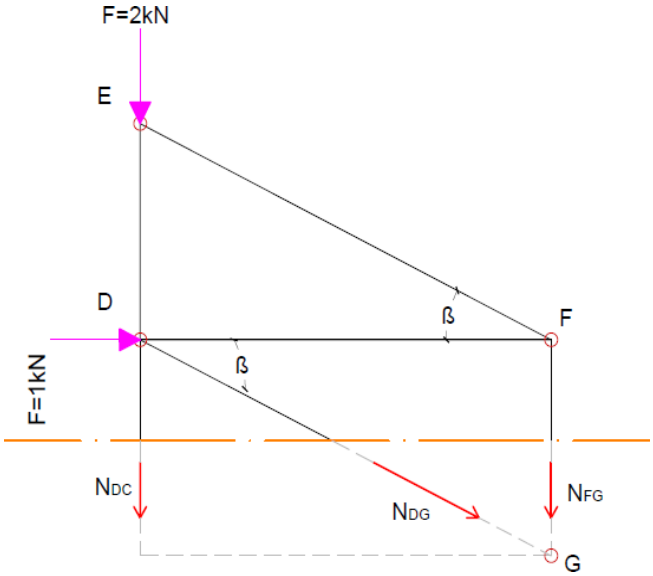
Para encontrar $\boldsymbol{N_{FG}}$ devemos fazer $\Sigma M_D = 0$.

Para encontrar $\boldsymbol{N_D}$ usamos $\Sigma M_G = 0$.

Lembrando que podemos utilizar um ponto que não aparece no corte pois mesmo em um ponto fora da estrutura o momento deverá ser zero já que o braço de alavanca é nulo.

Para encontrar $\boldsymbol{N_{DG}}$ usaremos $\Sigma F_X = 0$ ou $\Sigma F_Y = 0$.

No caso da estrutura estudada utilizaremos $\Sigma F_X = 0$ pois utilizará menos forças.



$$\beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26{,}56°$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$$

$$-N_{FG} \times 2 = 0$$

$$\boldsymbol{N_{FG} = 0}$$

$$\circlearrowright \Sigma M_G = 0$$

$$N_{DC} \times 2 - 1 \times 1 + 2 \times 2 = 0$$

$$N_{DC} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5\text{kN}$$

$$\boldsymbol{N_{DC} = -1{,}5\text{kN}}$$

$$\Sigma F_X = 0$$

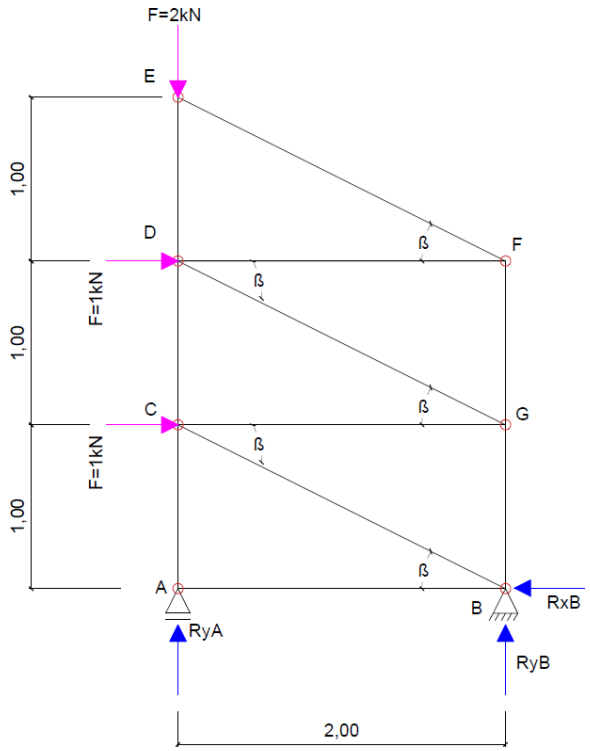
$$1 + N_{DG}\cos\beta = 0$$

$$N_{DG} = -\frac{1}{\cos\beta} = -\frac{1}{0{,}894}$$

$$= -1{,}12\text{kN}$$

$$\boldsymbol{N_{DG} = -1{,}12\text{kN}}$$

Os mesmos valores devem ser encontrados se analisarmos a outra parte da estrutura. Contudo, para isso, precisamos encontrar as reações dos apoios da treliça. Segue abaixo os cálculos:



$$\circlearrowright \Sigma M_B = 0$$

$$-R_{YA} \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 2 + 2 \times 2 = 0$$

$$R_{YA} = \frac{1}{2} = 0{,}5\text{kN}$$

$$\mathbf{N_{FG} = 0}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} - 2 + R_{YB} = 0$$

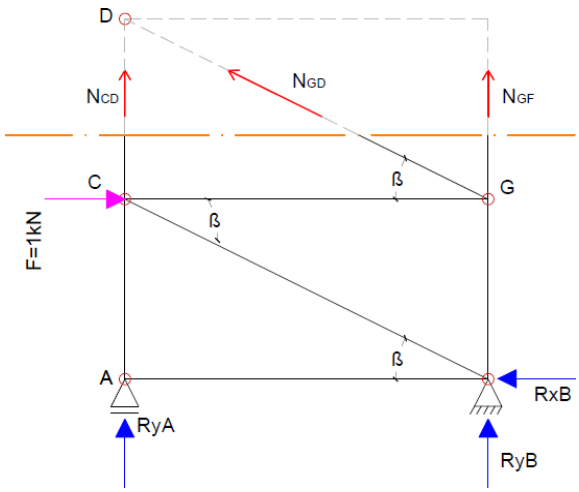
$$0{,}5 - 2 + R_{YB} = 0$$

$$\mathbf{R_{YB} = 1{,}5kN}$$

$$\Sigma F_X = 0$$

$$\mathbf{R_{XB} = 2kN}$$

Agora encontraremos as forças internas usando a outra parte da seção; elas devem ser iguais às encontradas na primeira parte do exemplo.



Para encontrar N_{CD} devemos fazer $\Sigma M_G = 0$.

Para encontrar N_G usamos $\Sigma M_D = 0$.

Para encontrar N_{GD} utilizamos $\Sigma F_X = 0$.

$$\beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26{,}56°$$

$$\circlearrowleft \Sigma M = 0$$

$$N_{CD} = \frac{R_{YA} \times 2 - R_{XB} \times 1}{2} = -1{,}5kN$$

$$N_{CD} = -1{,}5kN$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$$

$$N_{GF} \times 2 + 1 \times 1 + R_{YB} \times 2 - R_{XB} \times 2 = 0$$

$$N_{GF} = \frac{-1 - 3 + 4}{2} = 0kN$$

$$N_{GF} = 0$$

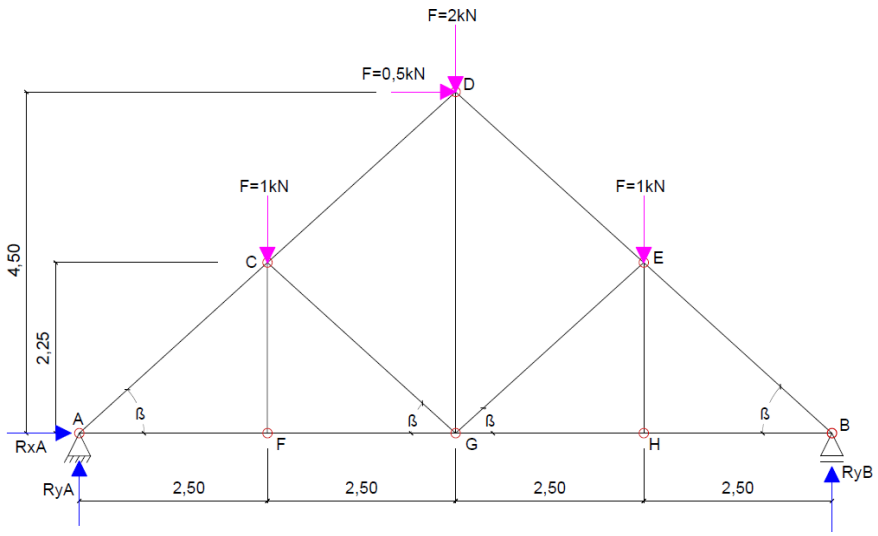
$$1 - R_{XB} - N_{GD}\cos\beta = 0$$

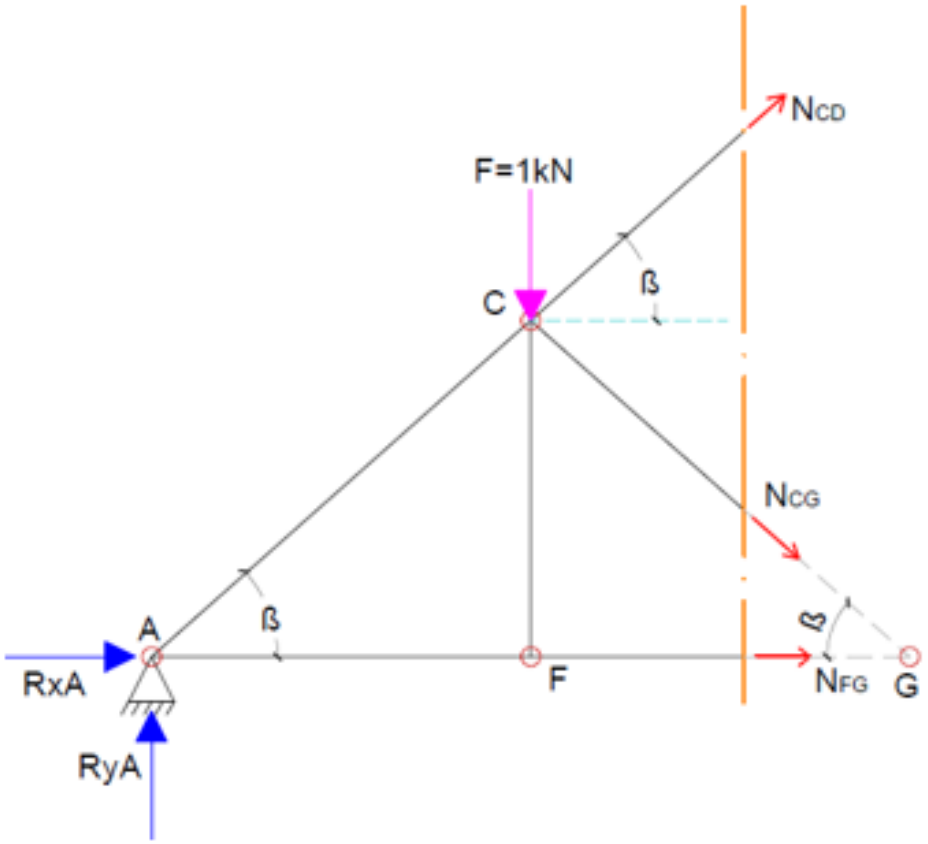
$$N_{GD} = -\frac{2 - 1}{0{,}894} = -1{,}12kN$$

$$N_{GD} = -1{,}12kN$$

Como esperado, as forças internas são as mesmas calculadas na primeira seção escolhida.

2. Treliça tipo Howe, tesouras de telhado. Calcule as forças internas N_{CD}, N_{CG}, N_{FG}.





Cálculo das Reações:

$$\circlearrowleft \Sigma M = 0$$

$$-1 \times 2{,}5 - 2 \times 5 - 1 \times 7{,}5 + R_{YB} \times 10 - 0{,}5 \times 4{,}5 = 0$$

$$R_{YB} = \frac{2{,}50 + 10 + 7{,}50 + 2{,}25}{10} = 2{,}225\text{kN}$$

$$\mathbf{R_{YB} = 2{,}225kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} + R_{YB} = 4$$

$$R_{YA} = 4 - 2{,}225 = 1{,}775\text{kN}$$

$$\mathbf{R_{YA} = 1{,}775kN}$$

$$\Sigma F_X = 0$$

$$R_{XA} + 0{,}5 = 0$$

$$\mathbf{R_{XA} = -0{,}5kN}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{4{,}5}{5{,}0} = 41{,}99°$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$$

$$-R_{YA} \times 2{,}50 + N_{FG} \times 2{,}25 + R_{XA} \times 2{,}25 = 0$$

$$-1{,}775 \times 2{,}50 + N_{FG} \times 2{,}25 - 0{,}5 \times 2{,}25 = 0$$

$$N_{FG} = \frac{4{,}4375 + 1{,}125}{2{,}25} = 2{,}47\text{kN}$$

$$\mathbf{N_{FG} = 2{,}47kN}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_G = 0$$

$$-R_{YA} \times 5 + 1 \times 2{,}5 - N_{CD}\sin\beta \times 2{,}5 - N_{CD}\cos\beta \times 2{,}25 = 0$$

$$-8{,}875 + 2{,}5 - (N_{CD} \times 0{,}669 \times 2{,}5) - (N_{CD} \times 0{,}743 \times 2{,}25) = 0$$

$$N_{CD} = -\frac{6{,}375}{3{,}349} = -1{,}90\text{kN}$$

$$\mathbf{N_{CD} = -1{,}90kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} - 1 + N_{CD}\sin\beta - N_{CG}\sin\beta = 0$$

$$N_{CG} = \frac{1{,}775 - 1 - 1{,}90 \times 0{,}669}{0{,}669} = -0{,}74\text{kN}$$

$$\mathbf{N_{CG} = -0{,}74kN}$$

4. Reações de apoio segundo as regras de Superposição dos Efeitos

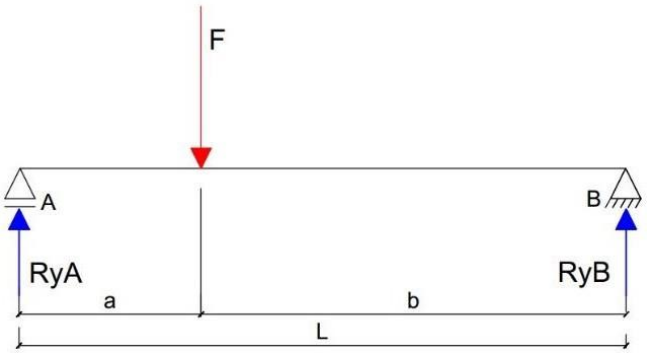
Quando há uma força ou momento aplicada em uma viga com determinado tipo de apoio, surgirão reações nos apoios, de modo que a estrutura fique estática. Cada tipo de esforço corresponderá à reações iguais e com sentidos opostos aos mesmos. O valor total final das reações será a superposição das reações parciais de cada carga aplicada. Essas regras auxiliam na hora de calcular as reações dos apoios da estrutura e diminuem o tempo dos cálculos.

Seja F uma força em Newton [N] apontando para baixo de qualquer valor. Esta força pode ser tanto uma resultante sobre a carga distribuída em uma seção como uma força concentrada aplicada em qualquer ponto da viga.

Considere o eixo Y positivo apontando para cima ↑, o eixo positivo de X para a direita → e o momento positivo no sentido anti-horário ↺.

1ª Regra: Força concentrada entre apoios

Para os cálculos das reações considere a viga biapoiada, desenhada na imagem abaixo:



Para encontrar R_A:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0$$

$$-R_A \times L + F \times b = 0$$

$$R_A = \frac{F \times b}{L}\ [N]$$

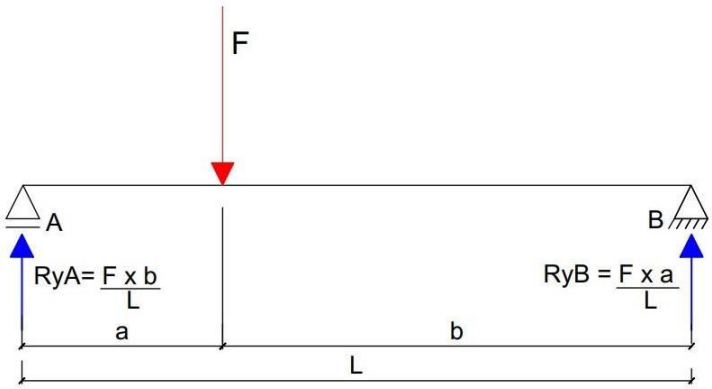
Para encontrar R_B:

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0$$

$$R_B \times L - F \times a = 0$$

$$R_B = \frac{F \times b}{L}\ [N]$$

Dessa forma, podemos dizer que a reação no apoio quando uma carga F é aplicada entre dois apoios, sobre a viga será o valor da força multiplicada pela distância entre a força e o apoio oposto dividido pela distância total entre os apoios.



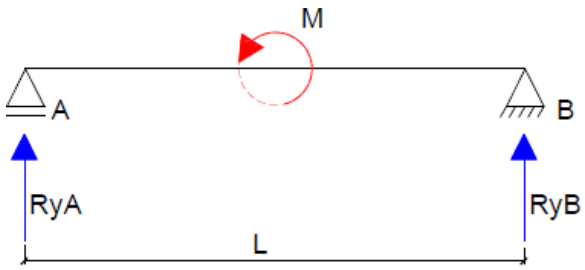
Essa regra pode ser utilizada quando há mais de uma força aplicada à viga. Para isso basta somar os valores dos resultados de cada força.

Note que quando a força está localizada no meio da viga $\left(\frac{L}{2}\right)$ o valor das reações será metade de F para cada apoio, já que:

$$R_Y = \frac{F \times \frac{L}{2}}{L} = \frac{F \times L}{L \times 2} = \frac{F}{2}$$

2ª Regra: Momento aplicado entre dois apoios

Considere o momento aplicado M em Newton x metro em uma viga como a ilustrada abaixo:



Para encontrar R_B:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$$

$$R_B \times L + M = 0$$

$$R_B = -\frac{M}{L}[N \times m]$$

Para encontrar R_A:

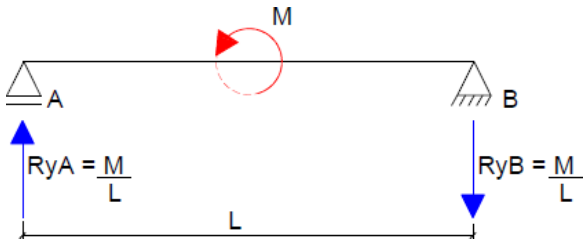
$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$$

$$-R_A \times L + M = 0$$

$$R_A = \frac{M}{L}[N \times m]$$

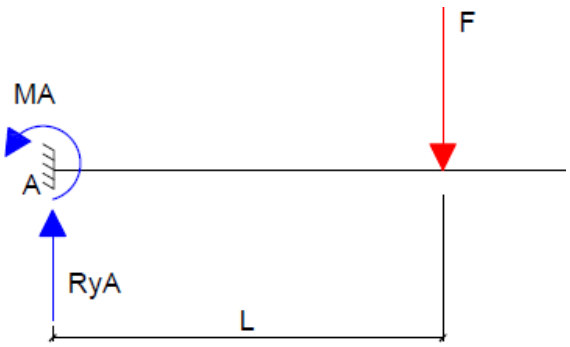
Podemos perceber que a reação em B é negativa, pois o momento faz com que a viga apresente uma rotação. O lado B tende a levantar, por isso a resultante neste ponto é negativa, visto que o apoio está segurando a extremidade B. Outro aspecto importante de se observar é que a posição em que o momento se encontra não interfere no valor da reação, apenas a distância entre os apoios.

As resultantes estão apresentadas a seguir:



3ª Regra: Viga engastada

Seja uma viga engastada no ponto A e uma força concentrada F aplicada em um ponto a uma distância L conforme a imagem a seguir:



Para encontrar R_A:

$$\uparrow^{+} \Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} - F = 0$$

$$R_{YA} = F\ [N]$$

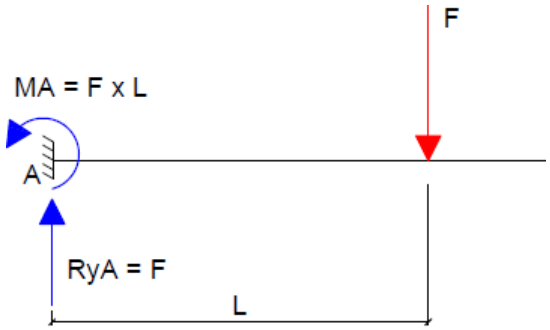
Para encontrar M_A:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$$

$$-F \times L + M_A = 0$$

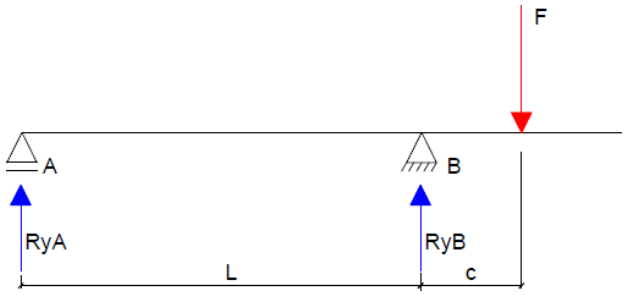
$$M_A = F \times L\ [N \times m]$$

Quando a viga estiver engastada, sua reação de apoio R_Y será igual à força aplicada na viga. Já o momento será o resultado da multiplicação da força pela sua distância ao apoio. A seguir uma imagem de como serão as resultantes no engaste:



4ª Regra: Força concentrada em balanço

A viga em balanço ocorre quando um lado possui apoio e a outra extremidade fica livre. Considere uma força F aplicada na parte em balanço da viga conforme o desenho abaixo:



Para encontrar R_B:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$$

$$R_B \times L - F \times (L + c) = 0$$

$$R_B = \frac{F \times (L + c)}{L} = \frac{F \times L + F \times c}{L}$$

$$R_B = F + \frac{F \times c}{L} \ [N]$$

Para encontrar R_A:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$$

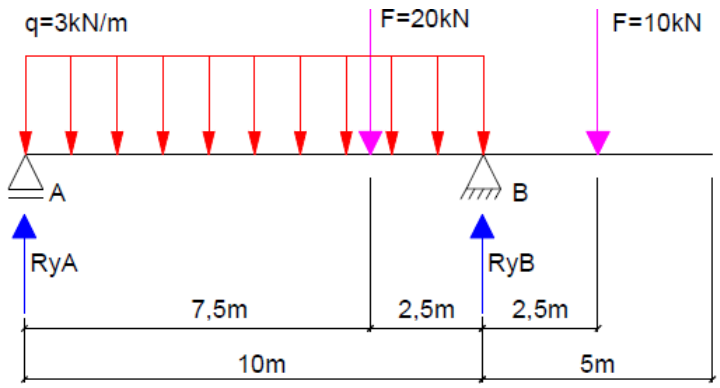
$$-R_A \times L - F \times c = 0$$

$$R_A = -\frac{F \times c}{L} \ [N]$$

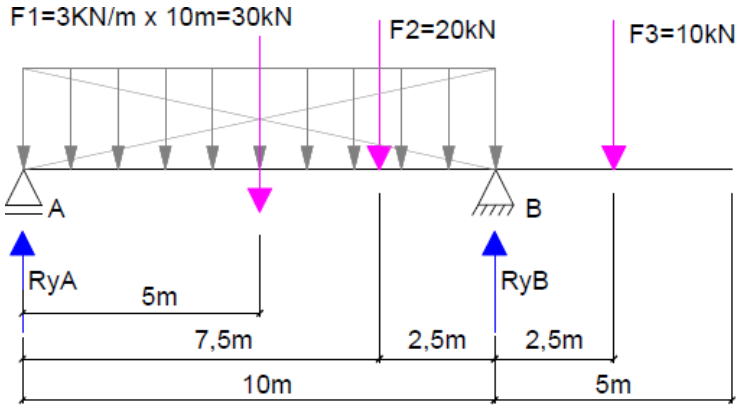
Percebe-se que a reação em A é negativa, ou seja, ela aponta para a direção contrária à direção que arbitramos no início do cálculo. Esse é um resultado onde verificamos que a força aplicada em um balanço gera uma rotação na viga; a ponta A tende a subir ao aplicarmos a força no balanço. A reação em A “puxa” a viga para que ela não gire, por isso a reação negativa.

Exemplos:

1. Calcule as reações da viga abaixo:



Inicialmente, é necessário encontrar a força equivalente ao carregamento distribuído.



Para isso, é necessário multiplicar o carregamento pela distância. A força estará aplicada no meio do carregamento. Neste caso, na posição x=5m.

$$R_{YA}$$

1ª Regra: $\frac{30\times5}{10}+\frac{20\times2,5}{10}=15+5=20\text{kN}$

2ª Regra: $-\frac{10\times2,5}{10}=-2,5\text{kN}$

$$R_{YA}=17,5\text{kN}$$

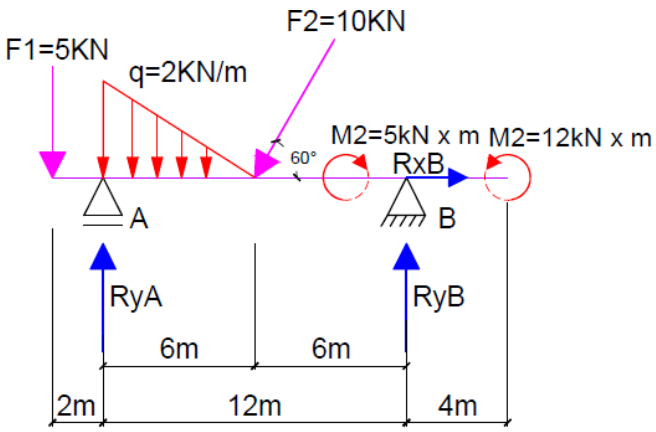
$$R_{YB}$$

1ª Regra: $\frac{30\times5}{10}+\frac{20\times7,5}{10}=15+15=30\text{kN}$

2ª Regra: $10+\frac{10\times2,5}{10}=10+2,5=12,5\text{kN}$

$$R_{YA}=42,5\text{kN}$$

2. Calcule as reações da viga a seguir:



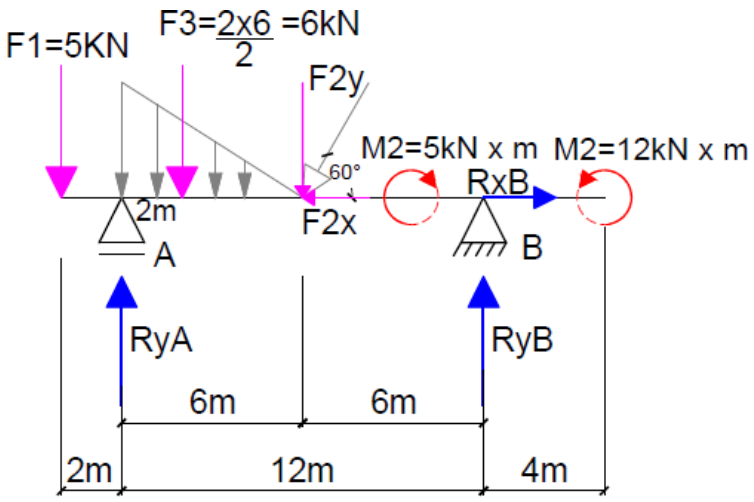
No início do exercício é recomendado encontrar a resultante do carregamento e decompor o vetor nos eixos x e y. A resultante de um carregamento triangular é encontrada através da área do triângulo. Neste exercício será:

$$F3 = \frac{2 \times 6}{2} = 6kN$$

As decomposições substituirão a força inclinada. Os cálculos são:

$$F2_X = F2 \times \cos 60° = 10 \times 0{,}5 = 5kN$$

$$F2_Y = F2 \times \sin 60° = 10 \times 0{,}866 = 8{,}66kN$$



$$R_{XA}$$

$$\uparrow^{+} \Sigma F_X = 0$$

$$R_{XB} - F2_X = 0$$

$$R_{XB} = F2_X$$

$$R_{XB} = 5kN$$

$$R_{YB}$$

1ª Regra: $\frac{6\times2}{12} + \frac{8,66\times6}{12} = 1 + 4,33 = 5,33kN$

2ª Regra: $-\frac{5\times2}{12} = -0,833 = 0,833kN$

3ª Regra: $\frac{5}{12} - \frac{12}{12} = 0,42 - 1 = -0,58kN$

$$R_{YA} = 3,92kN$$

$$R_{YA}$$

1ª Regra: $\frac{6\times10}{12} + \frac{8,66\times6}{12} = 5 + 4,33 = 9,33kN$

2ª Regra: $5 + \frac{5\times2}{12} = 5 + 0,833 = 5,833kN$

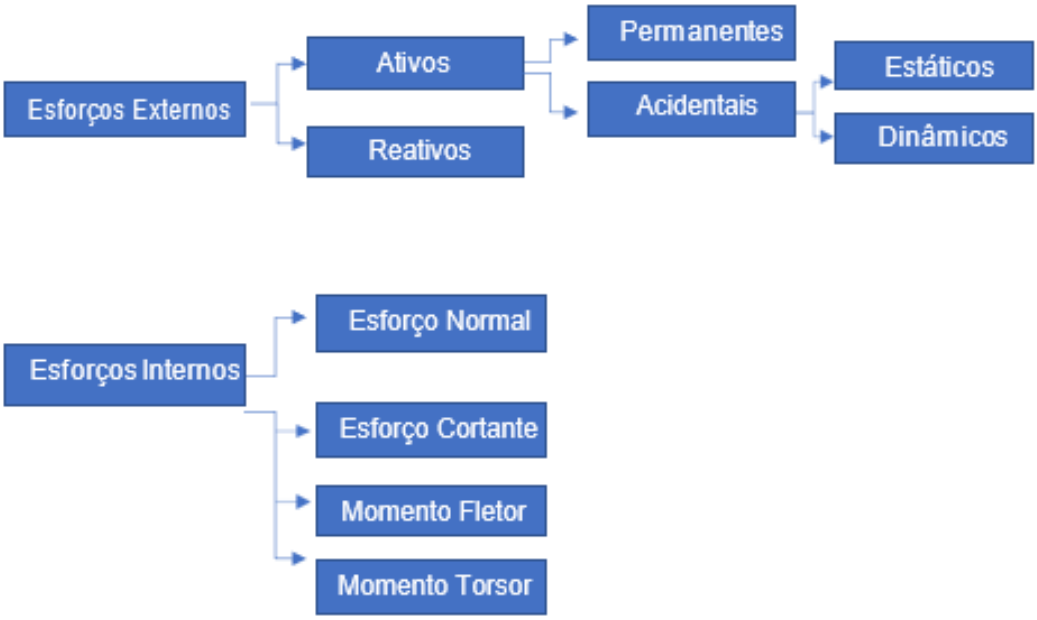
3ª Regra: $-\frac{5}{12} + \frac{12}{12} = -0,42 + 1 = 0,58kN$

$$R_{YA} = 15,74kN$$

5. Esforços em Estruturas

As estruturas são elementos de uma edificação que estão submetidas aos mais variados esforços, e que tem como constituição primária as partes resistentes que garantem a estabilidade de um objeto de projeto, como por exemplo, uma edificação.

Dentre os esforços que atuam nas estruturas, tem-se:



Esforços Externos

Os esforços externos ativos podem ser subdivididos em permanentes e acidentais. Os esforços ativos permanentes correspondem às cargas como peso próprio, instalações elétricas e hidrossanitárias e todos os aparatos e equipamentos que permanecerão anexados à estrutura ao longo de toda sua vida útil. Por outro lado, os esforços externos ativos acidentais são subdivididos em estáticos e dinâmicos. Os estáticos correspondem a esforços que são aplicados gradualmente, como o preenchimento de uma caixa d'água, cargas de móveis, enquanto os dinâmicos são esforços aplicados bruscamente, como o deslizamento decorrente da frenagem de um veículo e ação do vento.

Já os esforços externos reativos correspondem aos esforços produzidos pela estrutura em seus vínculos ou apoios externos de modo a tentar equilibrá-la, reagindo ao comportamento dos esforços externos ativos.

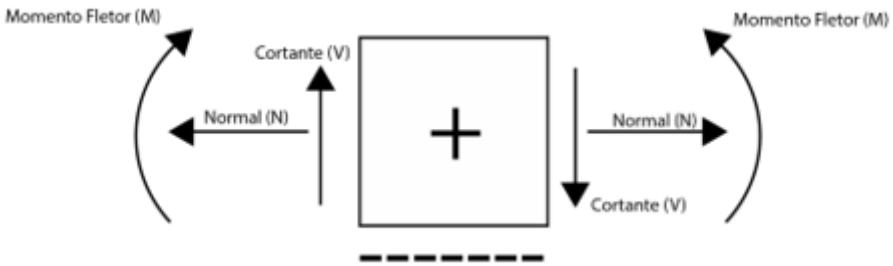
Esforços Internos

Os esforços internos estão atrelados à capacidade de transmissão de esforços de uma estrutura, ou seja, uma estrutura submetida a um determinado esforço externo precisa reagir internamente transmitindo estes esforços através de seus elementos. Portanto, os esforços internos estão diretamente ligados às deformações sofridas pelas estruturas.

Podemos considerar quatro esforços internos para o estudo da isostática. O esforço normal, que é analisado na seção transversal de um elemento e tem representatividade na compressão ou tração da estrutura. O esforço cortante, que se associa ao deslocamento de uma seção em seu próprio plano, ou seja, às tensões de cisalhamento. O momento fletor, que representa, em um plano de flexão, os esforços de flexão aos quais o elemento está submetido. E por fim, o momento torsor, que como seu próprio nome indica é responsável pela torsão de um elemento em seu próprio eixo.

O principal objetivo de determinar os valores dos esforços aos quais uma estrutura está submetida resume-se ao traçado dos seus diagramas de esforços internos, que mostram os pontos mais vulneráveis da estrutura, possibilitando a realização do dimensionamento da estrutura.

No entanto, para que o traçado destes diagramas siga o padrão correto, faz- se necessário conhecer a convenção de sinais adotada, conforme figura abaixo:

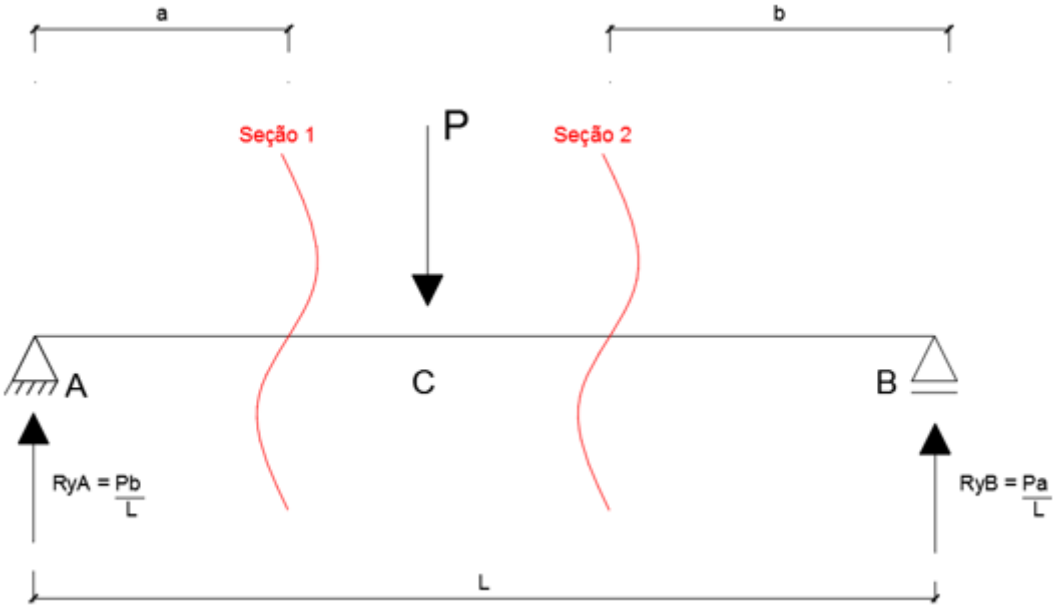


Ou seja, se analisarmos o elemento estrutural pelo seu lado esquerdo, devemos considerar como positivo os sentidos considerados do lado esquerdo desta convenção. Por outro lado, se analisarmos o elemento estrutural pelo seu lado direito, devemos considerar positivos os sentidos considerados do lado direito desta convenção.

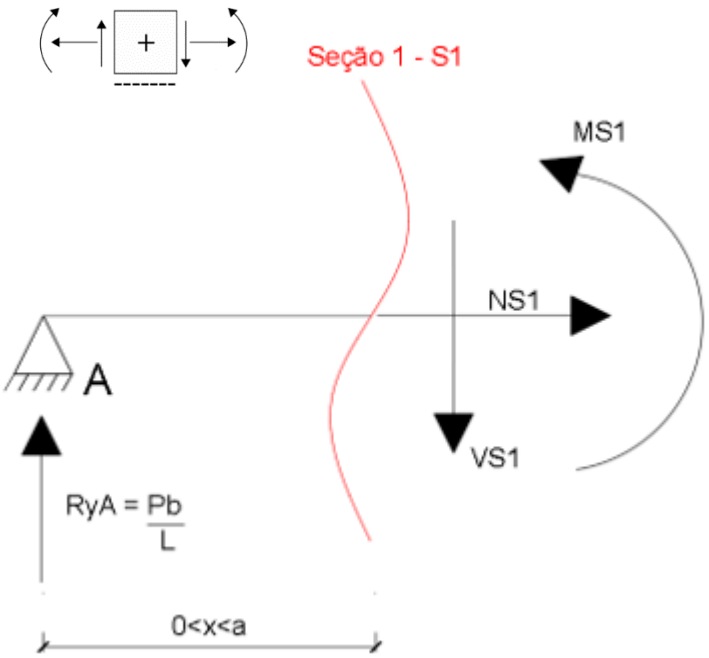
Utilizando o método das seções para determinação de esforços internos, objeto de estudo da estática, pode-se enunciar quatro situações que facilitam o traçado dos diagramas.

1ª Situação:

Trecho descarregado entre cargas



Expande-se então a seção e utiliza-se a convenção de Grinter para satisfazer as Equações do Equilíbrio de Newton e calcular os valores dos Esforços Normais, Cortante e Momento Fletor da Seção 1.



$$\Sigma F_X = 0$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$\frac{P_b}{L} - V_{S1} = 0$$

$$V_{S1} = \frac{P_b}{L}$$

$$\Sigma M_{S1} = 0$$

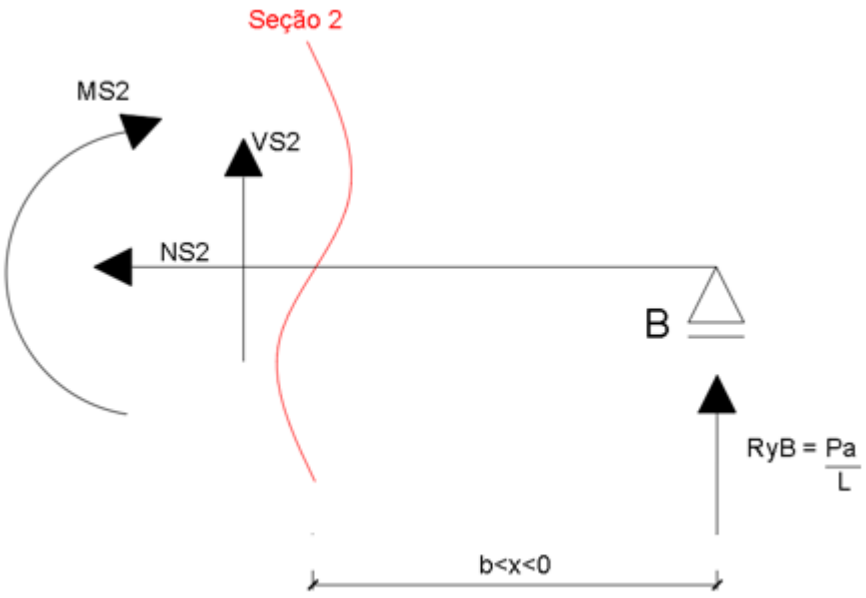
$$M_{S1} - \frac{P_b}{L}x = 0$$

$$M_{S1} = \frac{P_b}{L}x$$

A partir dos resultados obtidos, vemos que não há esforço normal atuante neste trecho e o esforço cortante corresponde ao valor da Reação do apoio A no eixo das ordenadas. Já para o momento fletor, tem-se que:

- Quando x vale zero, o valor do Momento Fletor também será zero.
- Quando x vale “a”, o valor do Momento Fletor será $\frac{P_{ab}}{L}$.

Agora, analisando a viga pela direita, temos a Seção 2, a ser resolvida:



$$\Sigma F_X = 0$$

$$-N_{S1} = 0$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$\frac{P_b}{L} - V_{S2} = 0$$

$$V_{S2} = -\frac{P_a}{L}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$-M_{S2} + \frac{P_a}{L}x = 0$$

$$M_{S2} = \frac{P_a}{L}x$$

A partir dos resultados obtidos, vemos que não há esforço normal atuante neste trecho e o esforço cortante corresponde ao negativo da reação de apoio no ponto B no eixo das ordenadas. No entanto, para o momento fletor:

- Se x vale zero, o valor do Momento Fletor também será zero.
- Quando x vale “b”, o valor do Momento Fletor será $\frac{P_{ab}}{L}$

Com as seções resolvidas, o traçado dos diagramas pode ser feito:

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

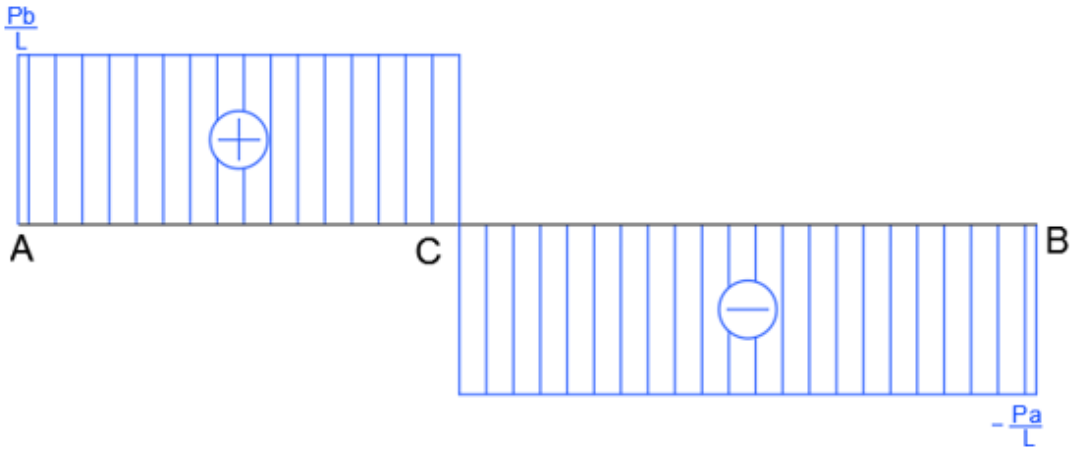
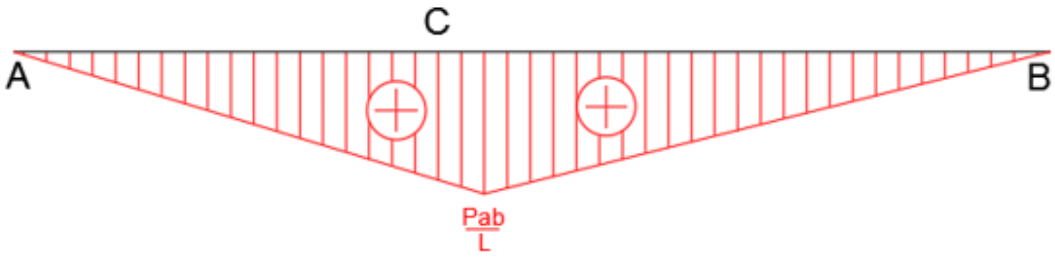


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

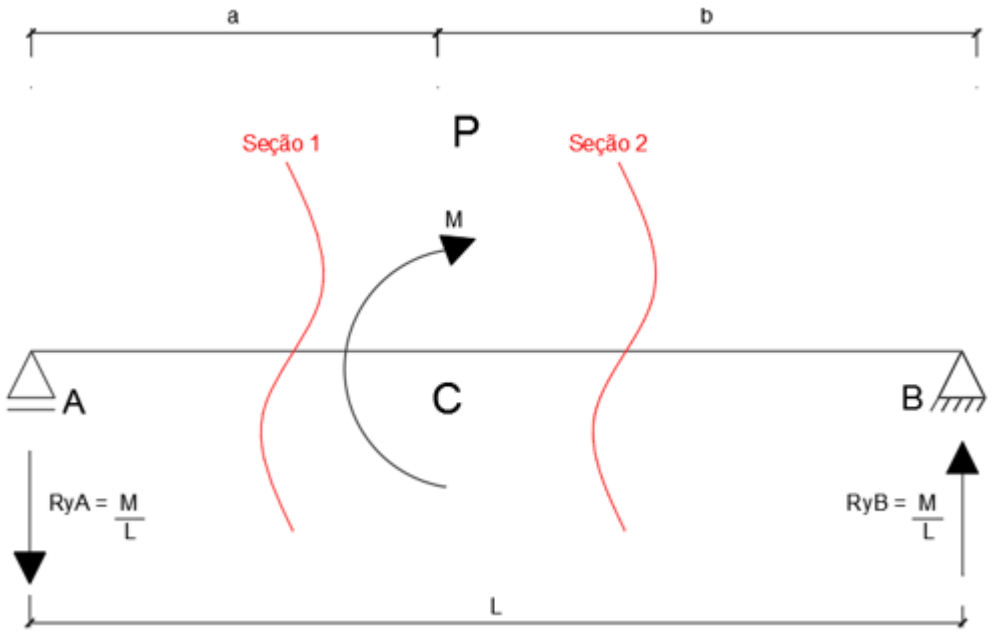


Portanto, podemos enunciar a primeira situação:

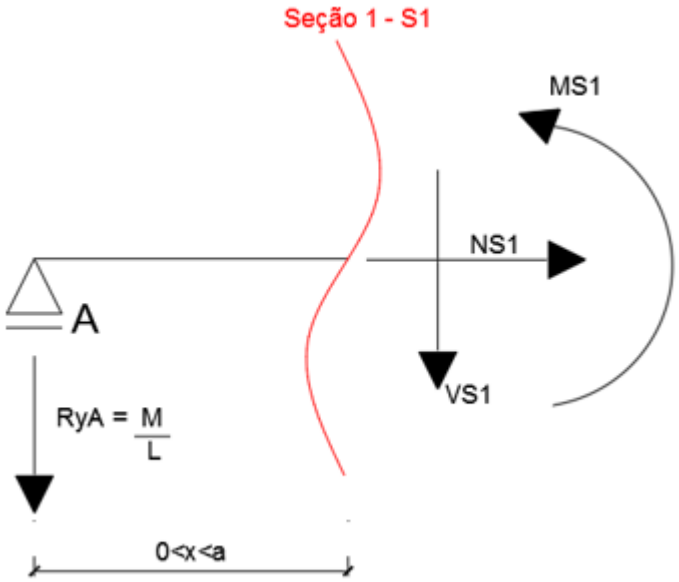
Um trecho descarregado entre cargas produz cortantes constantes e fletores de variação linear. No ponto de aplicação de uma carga concentrada haverá uma descontinuidade de igual valor no diagrama de esforços cortantes e um ponto de inflexão no diagrama de fletores.

2ª Situação:

Carga Momento Aplicada



Assim como na primeira situação enunciada, utilizando o método das seções e as Leis de Equilíbrio de Newton, resolve-se a primeira seção:



$$\Sigma F_X = 0$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$-\frac{M}{L} - V_{S1} = 0$$

$$V_{S1} = -\frac{M}{L}$$

$$\Sigma M_{S1} = 0$$

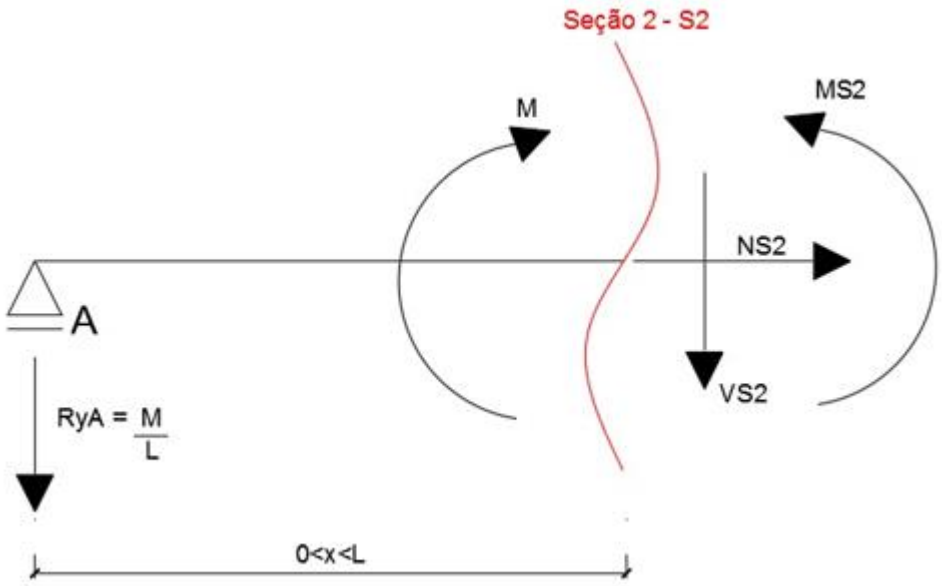
$$M_{S1} + \frac{M}{L}x = 0$$

$$M_{S1} = -\frac{M}{L}x$$

Como não atuam forças externas horizontais ou inclinadas sobre a seção analisada pode-se afirmar que o Esforço Normal é nulo. O esforço cortante, no entanto, terá o valor da reação de apoio em A, orientada ao longo do eixo das ordenadas. Para o momento fletor, tem-se:

- Se x vale zero, o Momento Fletor também vale zero.
- Se x vale a, o Momento Fletor vale $-\frac{M_a}{L}$

Para segunda seção, temos:



$$\Sigma F_X = 0$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$-\frac{M}{L} - V_{S2} = 0$$

$$V_{S2} = -\frac{M}{L}$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{S2} + \frac{M}{L}x - M = 0$$

$$M_{S2} = -\frac{M}{L}x + M$$

$$M_{S2} = \frac{ML - Mx}{L}$$

De mesmo modo, como não atuam forças horizontais ou inclinadas sobre a viga, não há esforço normal. O esforço cortante, no entanto, terá mesmo valor da reação de apoio em A, orientada ao longo do eixo das ordenadas. Para o momento fletor, tem-se:

- Quando x vale “a”, o momento vale $\frac{M_b}{L}$.

(Pois isolando M, temos que b=L-a)

- Quando x vale “L”, o momento vale zero.

Com as seções resolvidas, o traçado dos diagramas pode ser feito:

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

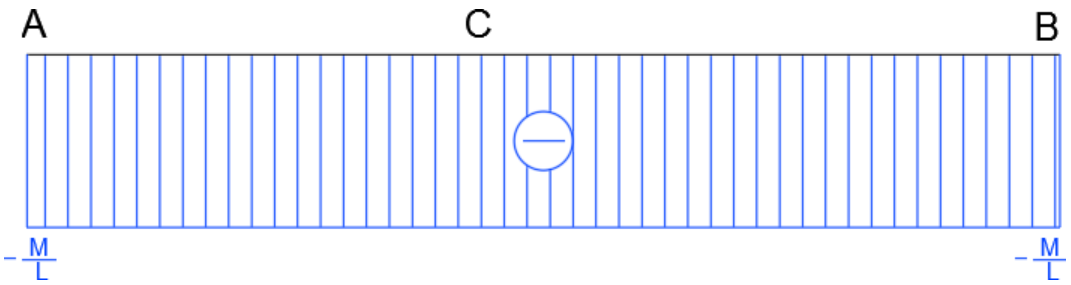
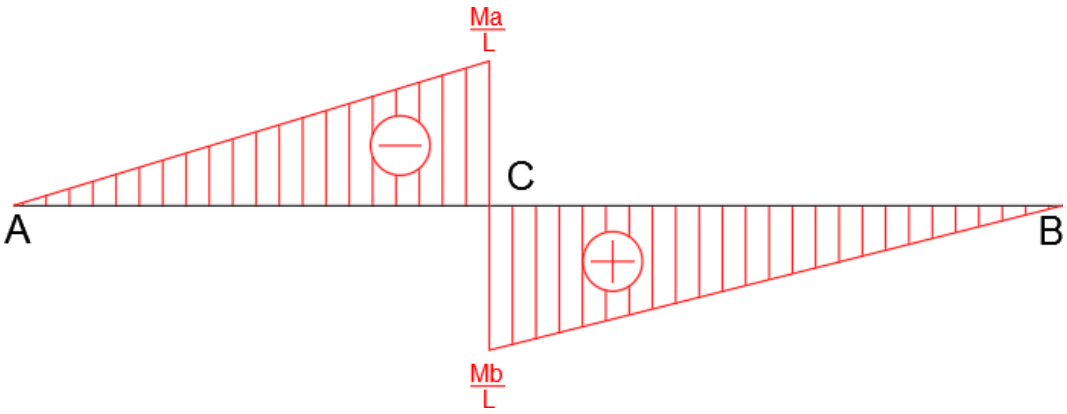


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

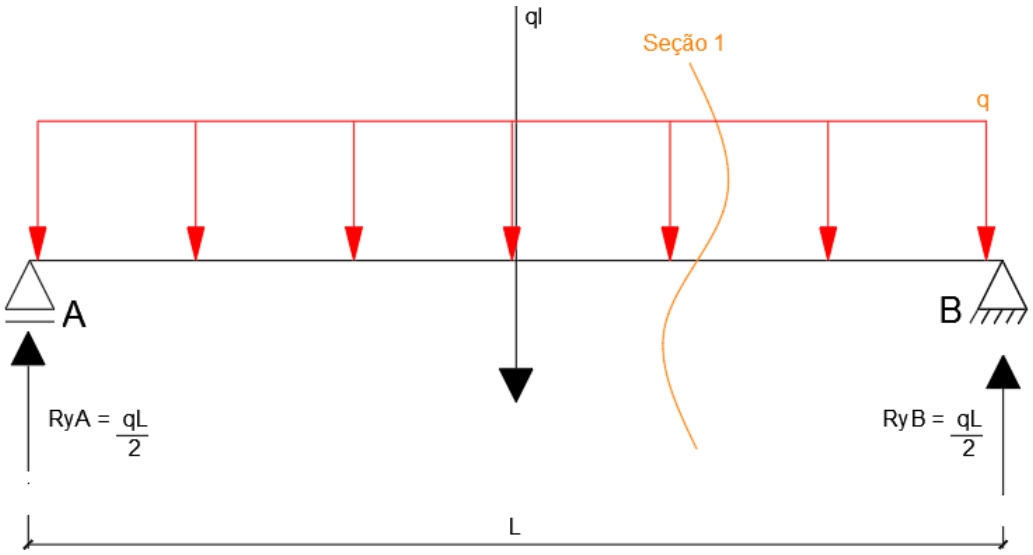


Conclui-se, portanto, que:

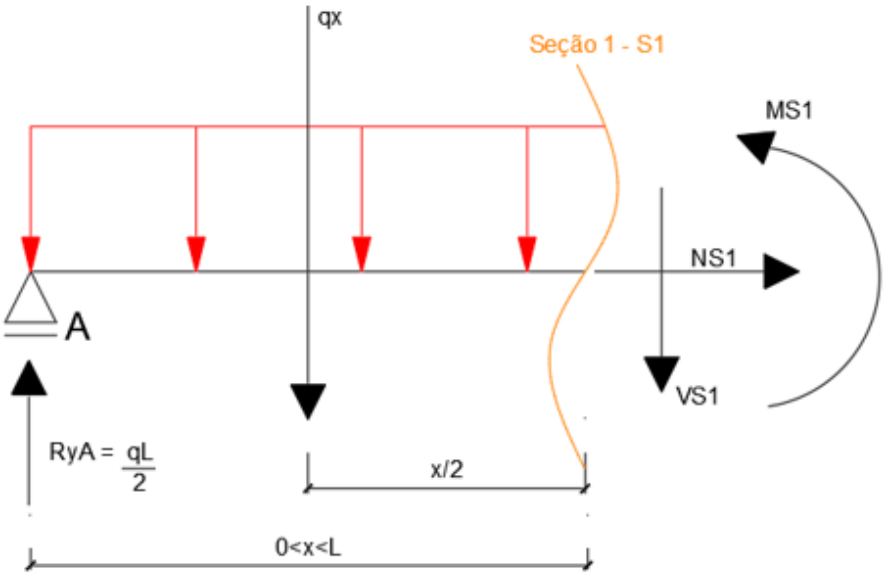
Carga momento aplicada produz uma descontinuidade de mesmo valor, no ponto de aplicação do momento no diagrama de momento fletor.

3ª Situação:

Carga uniformemente Distribuída



Utilizando o método das seções e as Leis do Equilíbrio de Newton, resolve-se a seção:



$$\Sigma F_X = 0$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$+\frac{qL}{2} - qX - V_{S1} = 0$$

$$V_{S1} = \frac{qL}{2} - qX$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{S1} - \frac{qL}{2}X + \frac{qX^2}{2} = 0$$

$$M_{S1} = \frac{qL}{2}X - \frac{qX^2}{2}$$

Como não atuam cargas horizontais ou inclinadas sobre a viga, pode-se afirmar que o esforço normal será nulo.

No entanto, para o esforço cortante, tem-se:

- Se x vale zero, o cortante será $\frac{qL}{2}$
- Se x vale L, o cortante será $-\frac{qL}{2}$
- Se x vale L, então o cortante vale zero.

Obs.: Temos especial interesse em esforços cortantes mudando de sinal, pois quando este for nulo teremos um máximo momento no diagrama de momento fletor.

Para o momento fletor, tem-se:

- Se x vale zero, o momento também vale zero.
- Se x vale L, o momento também vale zero.
- Se x vale L (onde o cortante é nulo), o momento é máximo e vale $\frac{qL^2}{8}$.

Com as seções resolvidas, o traçado dos diagramas pode ser feito:

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

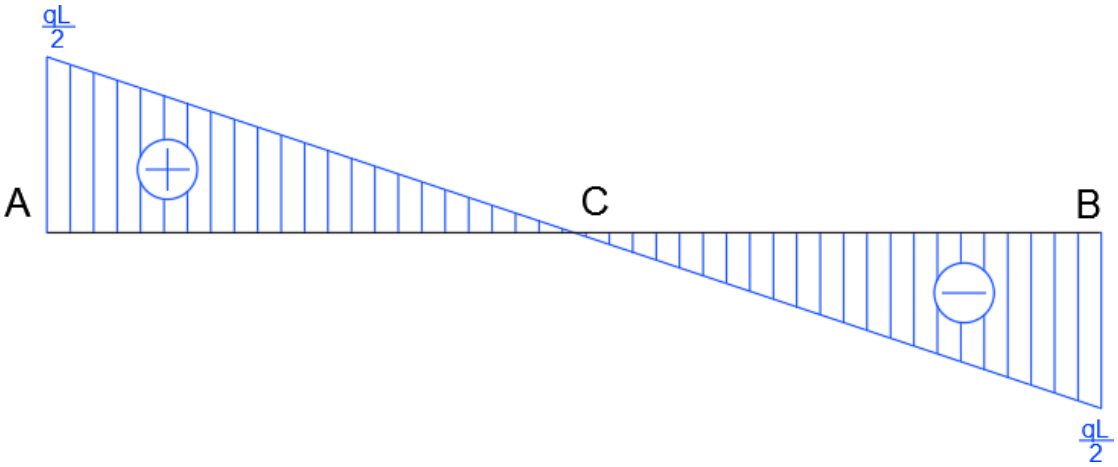
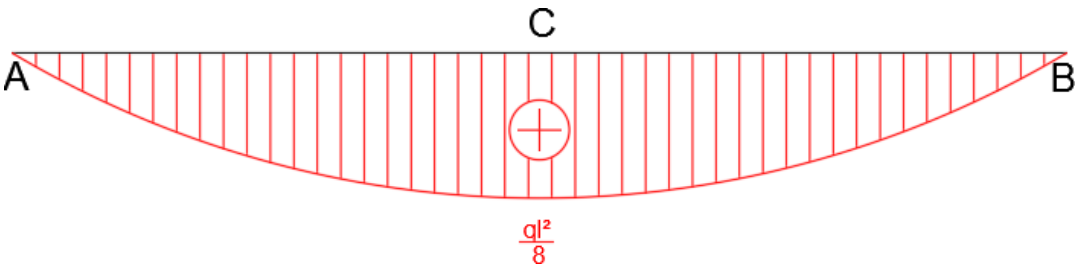


Diagrama de Momento Fletor (DMF)



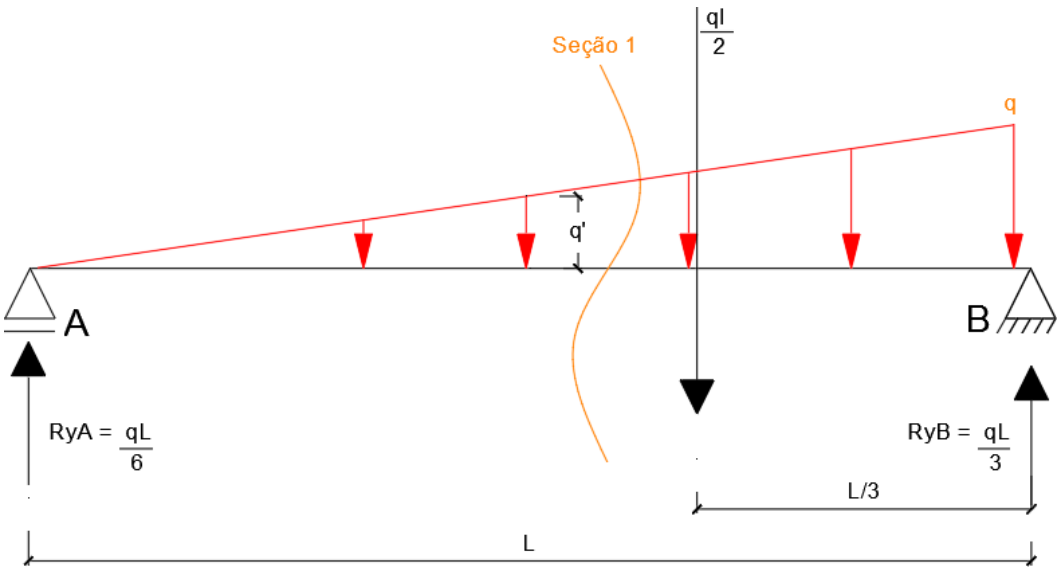
Conclui-se, portanto, que:

Um trecho com carga uniformemente distribuída produz cortantes de variação linear e fletores parabólicos de segundo grau.

OBS.: Entre cargas onde o cortante é nulo haverá um máximo momento fletor.

4ª Situação:

Trecho sob efeito de carga triangular

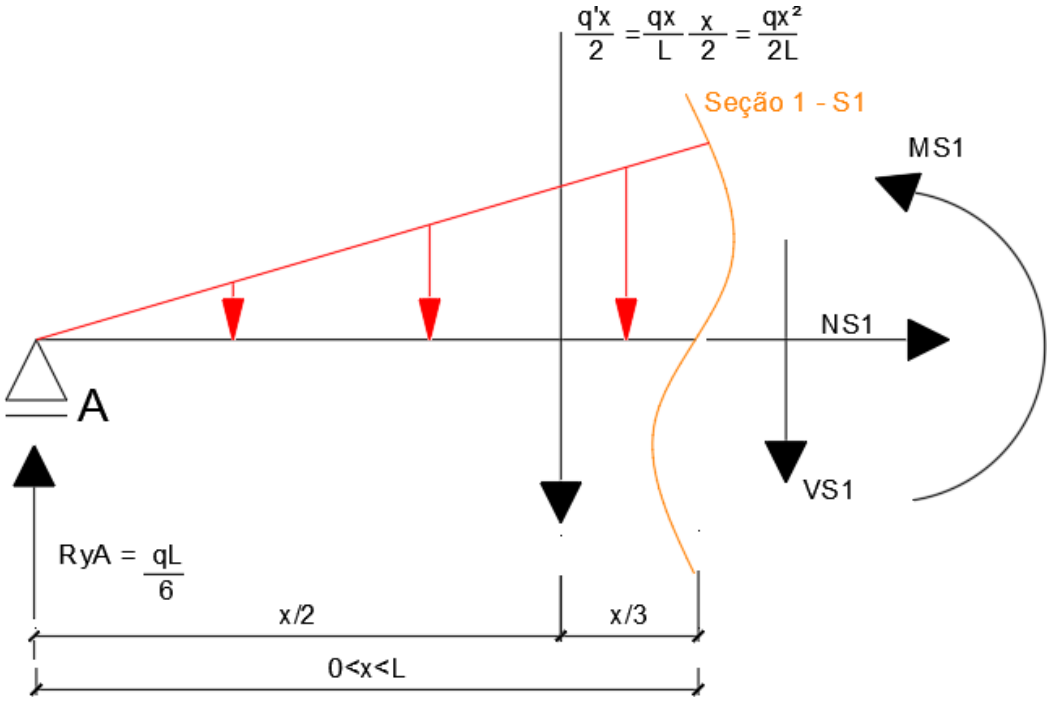


Neste caso, é interessante determinar inicialmente o valor de q' através de semelhança de triângulos.

$$\frac{q}{L} = \frac{q'}{x} \rightarrow \mathbf{q = \frac{qx}{L}}$$

Onde x é a distância até o ponto de altura q'.

Utilizando então o método das seções e as Leis do Equilíbrio de Newton, tem- se:



$$\mathbf{\Sigma F_X = 0}$$

$$N_{S1} = 0$$

$$\mathbf{\Sigma M = 0}$$

$$M_{S1} - \frac{qL}{6}X + \frac{qX^2}{2L}\frac{X}{3} = 0$$

$$M_{S1} = \frac{qL}{6}X - \frac{qX^3}{6L}$$

Como não atuam forças horizontais ou inclinadas sobre a viga, pode-se afirmar que o esforço normal é nulo.

Para o esforço cortante, tem-se:

- Quando x vale zero, o cortante será $\frac{qL}{6}$
- Quando x vale “L”, o cortante será $\frac{qL}{3}$
- Quando x vale “0,577L”, o cortante será zero.

– Dica: Utilizando a equação obtida no somatório das forças em Y, substitua V_{S1} por zero para encontrar o ponto em X onde o cortante será nulo e o momento máximo.

Para o momento fletor, tem-se:

- Quando x vale zero, o momento fletor vale zero
- Quando x vale “L”, o momento fletor vale zero.
- Quando x vale “0,577L”, o momento fletor será máximo e valerá 0,064qL².

Com as seções resolvidas, o traçado dos diagramas pode ser feito:

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

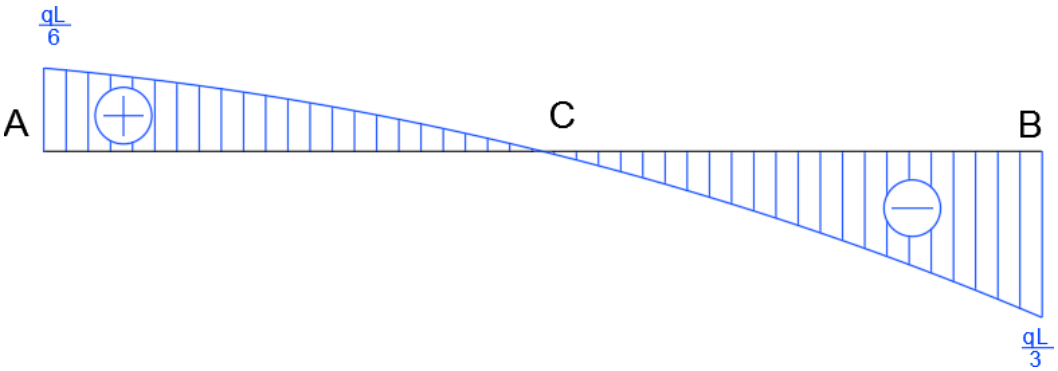
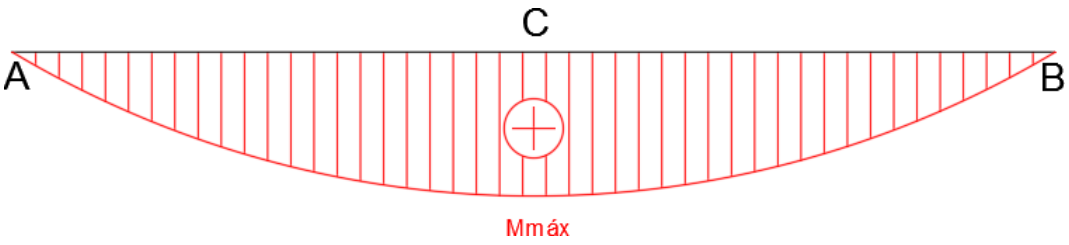


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

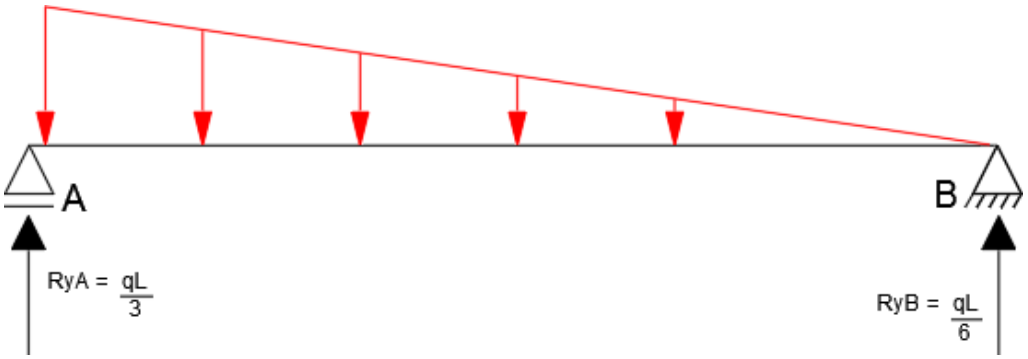


Conclui-se, portanto, que:

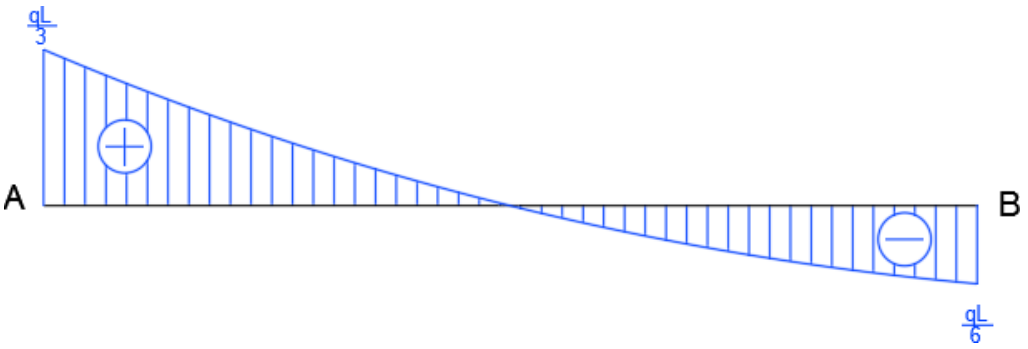
Um trecho com carga triangular produz esforço cortante parabólico de segundo grau e momento fletor parabólico de terceiro grau.

Para o caso dos carregamentos triangulares aplicados de maneiras distintas sobre o elemento, o comportamento dos diagramas de esforço cortante e momento fletor será diferente, a saber:

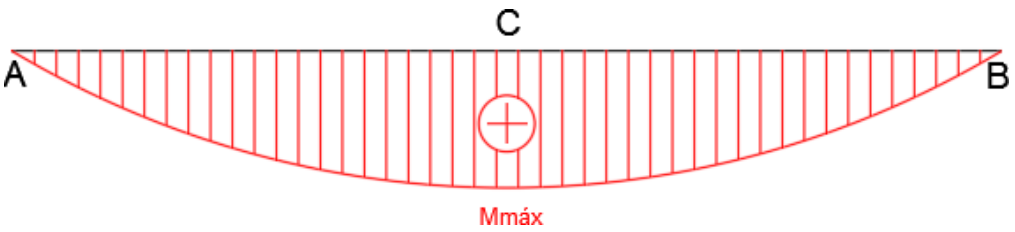
a) Caso 1



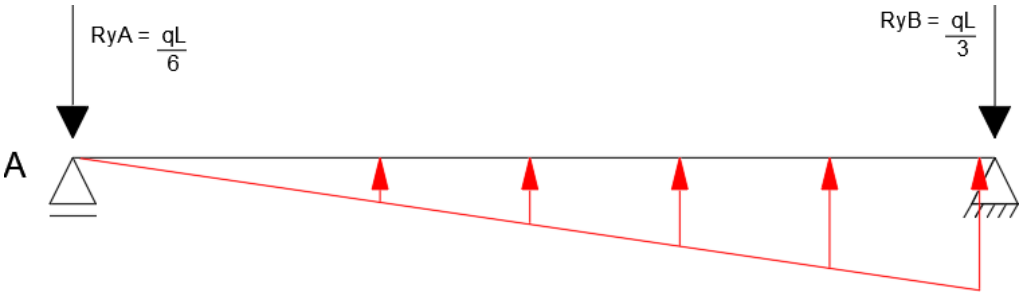
DEC



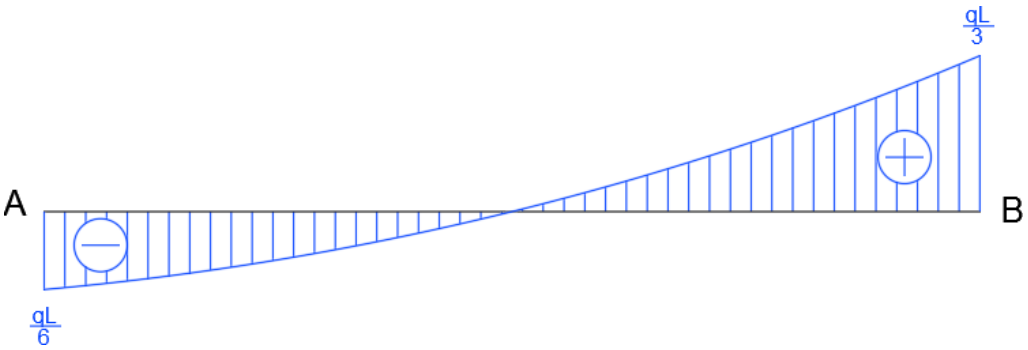
DMF



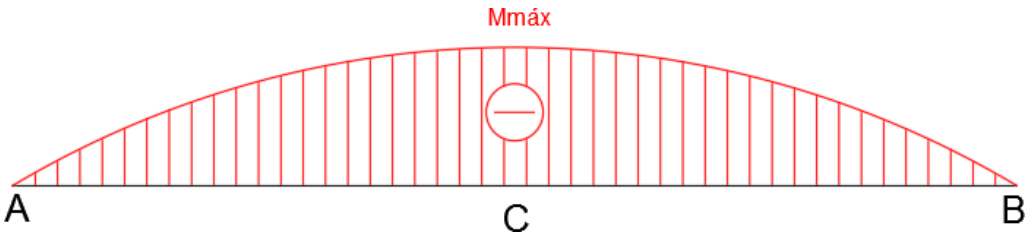
b) Caso 2



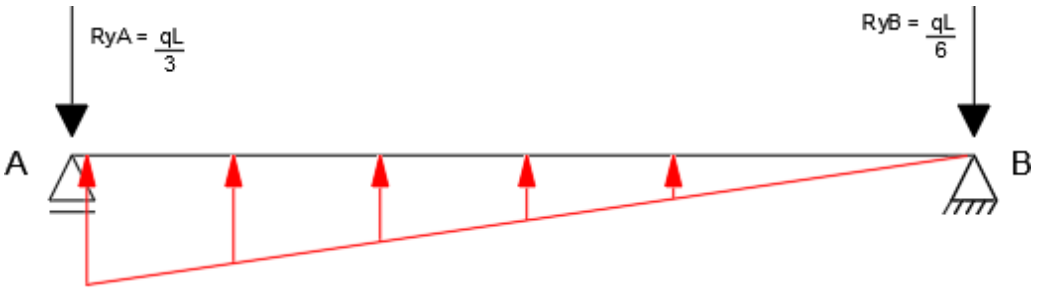
DEC



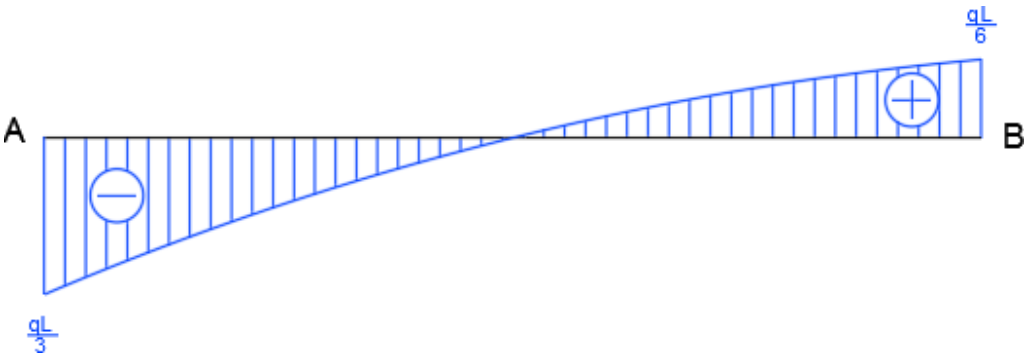
DMF



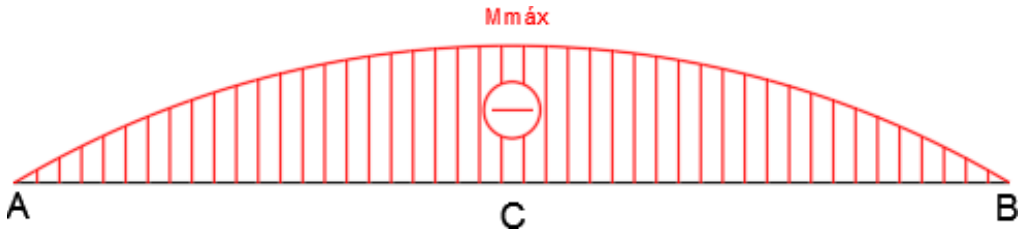
c) Caso 3



DEC

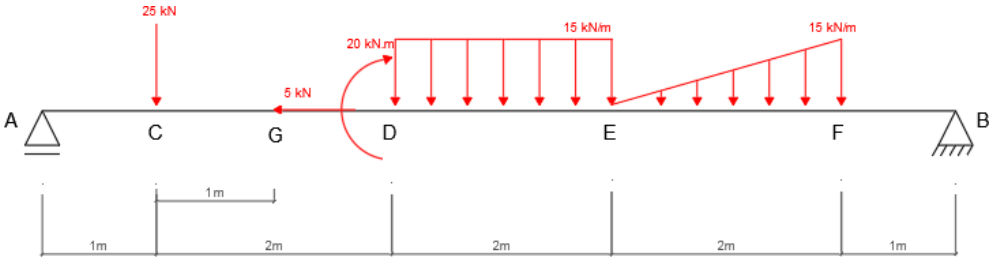


DMF



Exemplo

Aplicando as quatro situações distintas vamos resolver esta viga simplesmente apoiada.



Solução

Começamos pelo cálculo das reações de apoio, que podem ser realizados de duas formas distintas: através das Equações de Equilíbrio de Newton ou pelo método da superposição dos efeitos. Pela facilidade e velocidade que o método da superposição dos efeitos possui, este será o adotado neste exemplo.

Calculamos então a reação em y no apoio A

- Para força de 25 kN, aplicando a regra:

$$\frac{(25) \times (7)}{8} = 21{,}88 \text{ kN}$$

Como a força de 25 kN atua no sentido vertical para baixo, esta parcela da reação tem orientação oposta (para cima), portanto, quando somar terá valor positivo.

- Para o momento aplicado de 20 kN.m, aplicando a regra:

$$\frac{20}{8} = 2{,}5 \text{ kN}$$

Este momento aplicado tende a provocar um movimento de rotação no sentido horário, logo, tende a erguer a viga no ponto A. Portanto, para contrabalancear este efeito, esta parcela da reação apontará para baixo, e terá valor negativo no somatório.

- Para a carga distribuída de 15 kN/m, temos uma resultante de 30 kN que atua no ponto médio da carga distribuída. Aplicando a regra:

$$\frac{(30) \times (4)}{8} = 15 \text{ kN}$$

O efeito causado por esta carga é o mesmo causado pela carga aplicada de 20kN, portanto, esta parcela da reação apontará para cima, e terá valor positivo no somatório.

- Para a carga distribuída triangular, temos uma resultante de 15 kN, aplicada a $\frac{1}{3}$ de sua base. Aplicando a regra:

$$\frac{(15) \times (1{,}67)}{8} = 3{,}12 \text{ kN}$$

Assim como na parcela anterior, esta parcela da reação apontará para cima, com valor positivo no somatório.

Agora, soma-se todas as parcelas de cada força, a fim de se obter o valor da reação em A:

RyA = 21,88 − 2,5 + 15 + 3,12 = 37,5 kN

Se somarmos todas as cargas atuantes verticalmente sobre a viga e subtrairmos a reação em A, poderemos obter o valor da reação em B, que terá mesmo sentido da reação em A.

$\mathrm{R_yB}$ = 25 + 30 + 15 − 37,5 = 32,5 kN

A prova disto fica a cargo do leitor como exercício, sugere-se a utilização do método da superposição dos efeitos. Com a reações verticais nos apoios já obtidas, resta apenas obter a reação horizontal atuante no apoio B, que terá sentido oposto e mesmo valor da força atuante, a prova também fica a cargo do leitor, sugere-se utilizar a equação do Equilíbrio de Newton.

Portanto,

- RxA: 5 kN
- RyA: 37,5 kN
- RyB: 32,5 kN

O próximo passo é traçar os diagramas de esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Iniciamos a solução da viga em questão pelo diagrama de esforços normais.

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Iniciamos a análise de nossa viga pelo seu lado esquerdo, portanto, toda força que apontar no sentido negativo do eixo cartesiano “x”, ou seja, para a esquerda terá valor positivo no diagrama de esforço normal.

- De A até G: Não há nenhuma força horizontal aplicada, portanto, não há esforço normal.

- Em G: Aqui verificamos que há uma força de 5 kN aplicada que aponta para a esquerda. Como estamos analisando o esforço normal vindo pelo lado esquerdo da viga, então, toda força que apontar para a esquerda será positiva. Logo, pode-se dizer que há um esforço normal de 5 kN (positivo) atuante no ponto G, e marcar 5 kN no diagrama de Esforço Normal.

- De G até B: Não há nenhuma força horizontal aplicada, portanto, o esforço normal de 5 kN permanece constante até B.

- Em B: Seguindo a lógica do traçado de diagramas e a convenção de sinais, estamos vindo pelo lado esquerdo da viga e nos deparamos com uma reação de 5 kN apontando para a direita, ou seja, negativa. Como o esforço anterior era constante no valor de 5 kN e agora temos outro esforço com valor de -5 kN, somamos os dois e temos que o esforço normal em B será zero.

No final, o diagrama deverá ter a seguinte aparência:

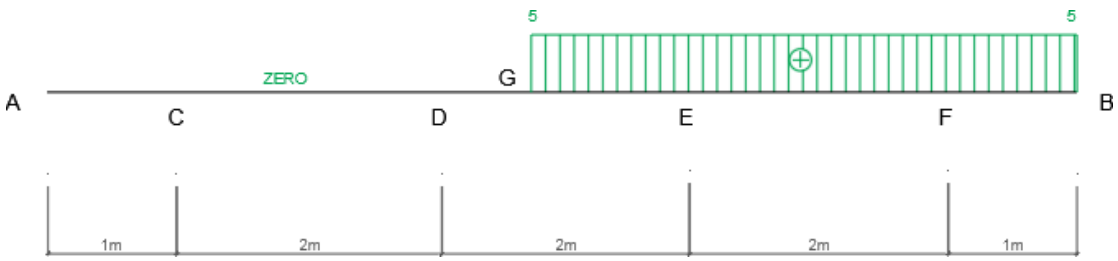


Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

- Novamente, vindo pelo lado esquerdo, temos o ponto A, onde temos a reação de apoio RyA, que vale 37,5 kN e aponta para cima. Conforme a convenção de sinais adotada, toda força que aponta para cima terá valor positivo e contribuirá para o esforço cortante.

- Em A: Temos 37,5 kN para cima, marcamos no diagrama o ponto de valor 37,5.

- De A até C: Conforme a primeira situação do traçado de diagramas apresentada nesta apostila, sabemos que no trecho descarregado entre cargas o cortante será constante. Logo, o cortante é constante até o ponto C.

- Em C: No ponto C, no entanto, temos uma carga de 25 kN que aponta para baixo, portanto, de valor negativo. Fazemos 37,5 – 25, o que nos dá o valor de 12,5 que marcamos no diagrama

- De C até D: Temos novamente um trecho descarregado entre cargas e concluímos que o cortante será constante até o ponto D.

- Em D: Neste ponto temos uma carga momento aplicada, que, conforme já citado, não produz esforço cortante. Além disso, teremos o início de uma carga distribuída, que atuará entre D e E.

- De D até E: Neste trecho, conforme a situação 3 anteriormente descrita, sabemos que o cortante terá variação linear. Sabemos também que o valor da carga equivalente é de 30 kN, logo, subtraímos o valor do cortante em D da carga equivalente e marcamos no ponto E seu resultado (carga equivalente aponta para baixo, contrariando a convenção positiva dos sinais). Então, 12,5 – 30 é igual a -17,5, que marcamos no ponto E. Para ligarmos os pontos D e E, basta lembrarmos que quando há uma carga linearmente distribuída o cortante terá variação linear, e, portanto, ligamos os dois pontos através de uma reta.

OBS.: A ligação entre os pontos D e E intercepta o eixo do diagrama, ou seja, dá origem ao ponto G, um ponto de máximo momento fletor. É conveniente descobrirmos a que distância isso ocorre, para que possamos determinar o valor do momento quando formos traçar seu diagrama.

Para determinarmos a distância entre G e D, utilizamos a seguinte relação:

$$\frac{\text{Valor do esforço cortante}}{\text{Valor da carga distribuída}} = \frac{12{,}5}{15} = 0{,}833$$

Logo, o ponto G dista 0,833 metros do ponto D.

- De E até F: Aqui temos uma carga distribuída triangular, cujo valor da carga equivalente é de 15 kN apontando para baixo. Então, no ponto F, teremos o valor do esforço cortante no ponto E subtraído de 15 (-17,5 – 15 = - 32,5), que resulta em -32,5, que marcamos no diagrama no ponto F. Seguindo a quarta situação descrita, sabemos que o diagrama de esforço cortante para uma carga triangular terá variação parabólica de segundo grau e a orientação da parábola será definida pela forma como a carga estará aplicada.

- De F até B: Temos novamente um trecho descarregado entre cargas, com esforço cortante de variação linear até o ponto B.

- Em B: Temos a reação em B de valor 32,5 kN apontando para cima, logo, somamos com o valor anterior e verificamos que o valor final em B será zero.

No final, o diagrama deverá ter a seguinte aparência:

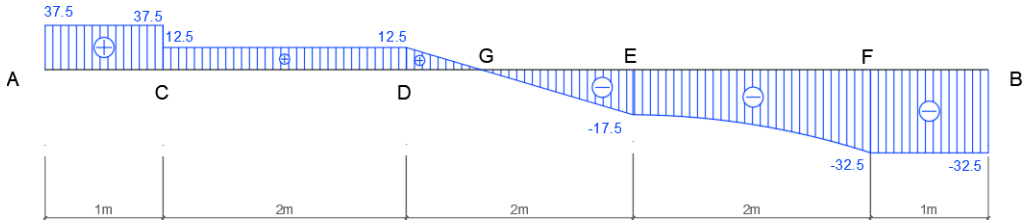


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

No caso do traçado do diagrama de momento fletor, é preciso ficar atento para não cometer nenhum engano. Existem diversas formas de se calcular o momento fletor para traçar seu diagrama. Neste exemplo, utilizaremos a área do gráfico do esforço cortante quando possível, e quando não tivermos como determinar esta área, utilizaremos o somatório dos momentos naquele ponto (como se uma seção fosse feita no ponto).

Para utilizarmos a área do gráfico do cortante precisamos saber que:

"Se analisarmos pela esquerda: Quando o cortante for positivo, o fletor também será positivo. Quando o cortante for negativo, o fletor também será negativo.

Se analisarmos pela direita: Quando o cortante for negativo, o momento fletor será positivo. Quando o cortante for positivo, o momento fletor será negativo."

Lembrete: Em Engenharia Civil, onde preferencialmente usam-se estruturas de concreto armado, na maioria dos casos, as cargas que atuam sobre as vigas são verticais para baixo, atuando ao longo do comprimento da viga, o que provoca tração nas fibras inferiores, e compressão nas superiores, quando submetidas á flexão. Daí que se convencionou, que o lado positivo do diagrama de momentos fletores é o lado inferior, onde as fibras da estrutura sofrem esforços de tração, e onde deverá ser colocada a armadura de tração correspondente. Portanto, é conveniente para o concreto armado, indicando sempre o lado do diagrama de fletores, como o lado tracionado na flexão, onde será desenhada a correspondente armadura de tração, no projeto estrutural de formas.

Neste caso, vamos traçar o diagrama analisando pelo lado esquerdo novamente, então todo esforço cortante positivo gerará fletor positivo, e todo cortante negativo gerará fletor negativo:

- Em A e B, o momento fletor será zero. Neste caso, o momento não seria zero se houvesse um momento aplicado no ponto ou se um dos apoios fosse um engaste.

- Em C: Temos esforço cortante positivo, cuja área é: $\mathrm{M_C}$ = 37,5 × 1 = 37,5 $kN.m$

- Em D: Temos cortante positivo, que gera fletor positivo. Neste caso o Valor do momento em D será a soma da área do cortante entre A e C e C e D, como segue: $\mathrm{M_D}$ = 37,5 + (12,5 × 2) = 62,5 $kN.m$

- Em D: Aqui teremos uma particularidade, uma carga momento aplicada no ponto D, com valor de 20 kN.m. Para determinarmos o momento em D contabilizando a carga momento aplicada precisamos levar em conta a convenção de sinais adotada. Como estamos analisando pela esquerda, sabemos que momentos no sentido horário serão positivos, logo, somamos o momento aplicado ao momento anterior: $\mathrm{M_D}$ = 62,5 + 20 = 82,5 $kN.m$
- Em G: Como em G temos um cortante nulo, temos também momento máximo e precisamos determinar seu valor. Para isto, utilizaremos o valor do momento anterior somado à área do cortante triangular.

$$M_G = M_{máx} = 82{,}5 + \frac{(12{,}5 \times 0{,}833)}{2} = 87{,}7\ \text{kN.m}$$

Observe que após o ponto G, o esforço cortante se torna completamente negativo, o que indica que o valor do momento a seguir diminuirá até chegar no valor zero em B.

- Em E: Agora, como o cortante é negativo, o momento também será, portanto, todo valor que calcularmos para área do cortante iremos subtrair dos valores anteriores.

- Em F: Neste ponto, como o gráfico do esforço cortante é uma parábola de segundo grau, duas soluções simples podem ser adotadas:
    1. Tomamos o efeito causado em F pelas forças atuantes sobre a viga.
    2. Calcular a área do cortante analisando pelo lado direito.

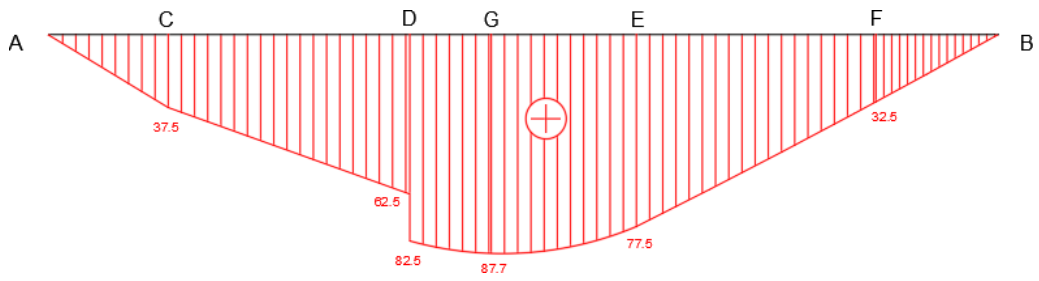
  Escolheremos o segundo caso, pois torna a solução mais rápida. Agora devemos lembrar que o esforço cortante negativo (quando analisamos pelo lado direito) gerará momento fletor positivo. Logo: $M_{F(direita)} = 32{,}5 \times 1 = 32{,}5\ kN.m$

  Agora basta ligarmos os pontos seguindo as situações deduzidas anteriormente:

  De A até C, C até D e F até B: Variação linear, pois é um trecho descarregado entre cargas.

  De D até E: Momento Fletor Parabólico de Segundo Grau, pois está sob efeito de carga linearmente distribuída.

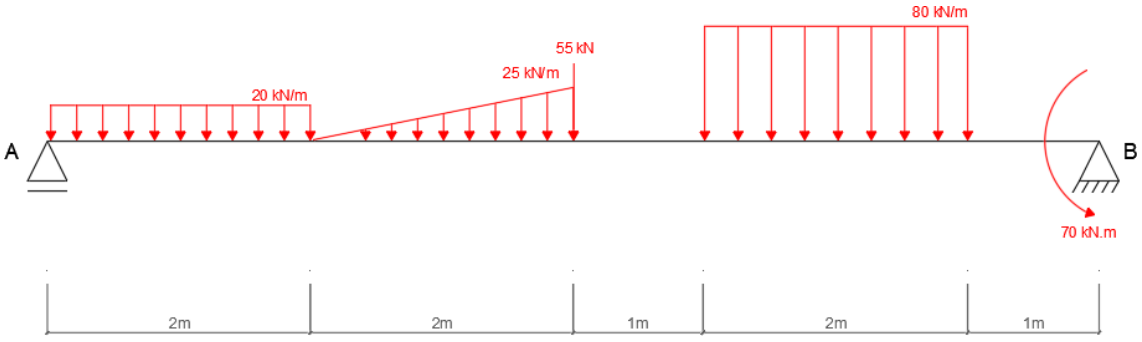
  De E até F: Momento Fletor Parabólico de Terceiro Grau, pois está sob efeito de carregamento triangular.



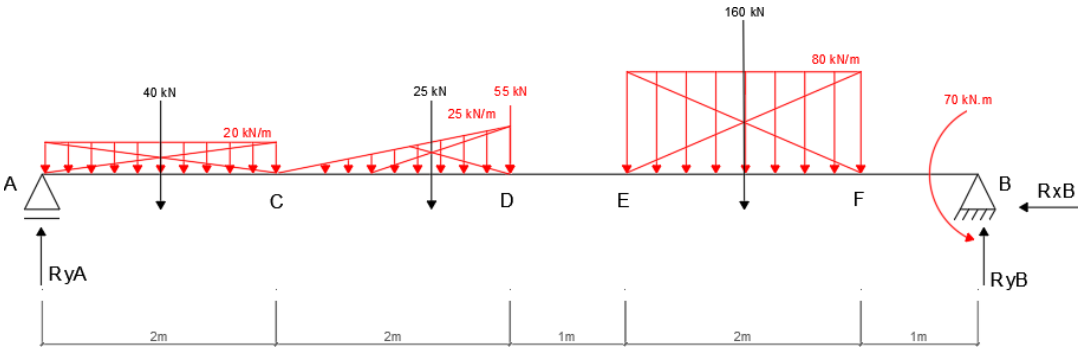
Vigas

As vigas são elementos estruturais que recebem as cargas das lajes e estruturas acima portadas, transmitindo os esforços para os pilares que os levarão até a fundação, onde haverá a transmissão das cargas ao solo.

Exemplo: Traçado de Diagramas de Viga Simples



Cálculo das Reações de apoio



Assim como efetuado no exemplo anterior, iremos utilizar o método da superposição dos efeitos para calcular as reações de apoio. No entanto, podemos perceber diretamente que todas as forças externas atuantes são verticais para baixo, bem como, o momento de 70kN.m gira no sentido anti-horário tentando erguer o ponto B e abaixar o ponto A. Com estas informações, calcularemos a Reação em A e a Reação em B fica a cargo do leitor:

- Carga distribuída de 20kN/m: $\frac{(40)\times(7)}{8} = 35\ \text{kN}$ para cima

- Carga triangular distribuída 25kN/m: $\frac{(25)\times(\frac{2}{3}+4)}{8} = 14{,}6\ \text{kN}$ para cima

- Carga pontual de 55 kN: $\frac{(55)\times(4)}{8} = 27{,}5\ \text{kN}$ para cima

- Carga distribuída de 80kN/m: $\frac{(160)\times(2)}{8} = 40\ \text{kN}$ para cima

- Momento de 70 kN.m: $\frac{70}{8} = 8{,}75\ \text{kN}$ para cima

Logo,

R_yA: 35 + 14,6 + 27,5 + 40 + 8,75 = 125,85 = 125,8 kN

R_yB: 154,2 kN

R_xB = 0 kN

Como não existem forças horizontais nem inclinadas atuando sobre esta viga, podemos afirmar diretamente que não há esforço normal atuante, e portanto, partir diretamente para a solução dos diagramas de esforço cortante e momento fletor.

OBS.: No presente exemplo alguns arredondamentos foram feitos nas reações de apoio, e, portanto, as contas apresentadas no diagrama de momento fletor, em especial, estarão com um pequeno desvio do valor final apresentado. Se o leitor utilizar todos os algarismos significativos desde o início perceberá que as contas estão corretas.

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

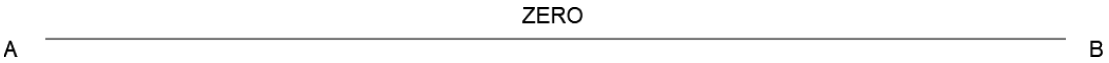
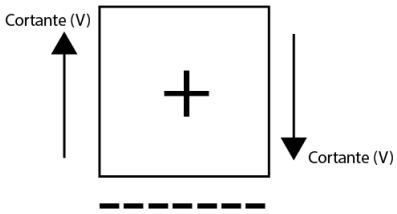


Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

Para o traçado do diagrama de esforço cortante, relembramos nossa convenção:



- **Em A:** Vindo pela esquerda, o primeiro esforço que temos é a reação em A. Marcamos a reação em A no gráfico em seu respectivo ponto.
- **Entre A e C:** Temos a presença de uma carga distribuída, logo, o cortante terá variação linear e valerá: 125,8 − 40 = 85,8 kN, que marcamos em C.
- **Entre C e D:** Temos a presença de uma carga triangular distribuída, que produz cortante de variação parabólica, e valerá: 85,8 − 25 = 60,8kN, que marcamos em D.
- **Em D:** Além do cortante ocasionado pelo carregamento triangular, temos a ação de uma força de 55kN, que deve ser subtraída do cortante anterior, e valerá: 60,8 − 55 = 5,8 kN, que também marcamos em D.

- **Entre D e E:** Temos um trecho descarregado entre cargas, portanto o cortante permanece constante.
- **Entre E e F:** Temos uma carga distribuída que gera cortante de variação linear, de valor: 5,8 − 160 = −154,2 kN, marcado em F. Neste intervalo entre E e F surge o ponto G, de cortante nulo, onde portanto o momento será máximo. Precisamos descobrir a distância de E em que o ponto G intercepta o eixo do elemento, para isso fazemos:

$$\frac{5{,}8}{80} = 0{,}07m$$

- **Entre F e B:** Temos um trecho descarregado entre cargas, portanto o cortante permanece constante.
- **Em B:** Temos a reação em B que vale exatamente 154,2 kN. Logo, podemos fechar o cortante em B.

O diagrama terá a seguinte aparência:

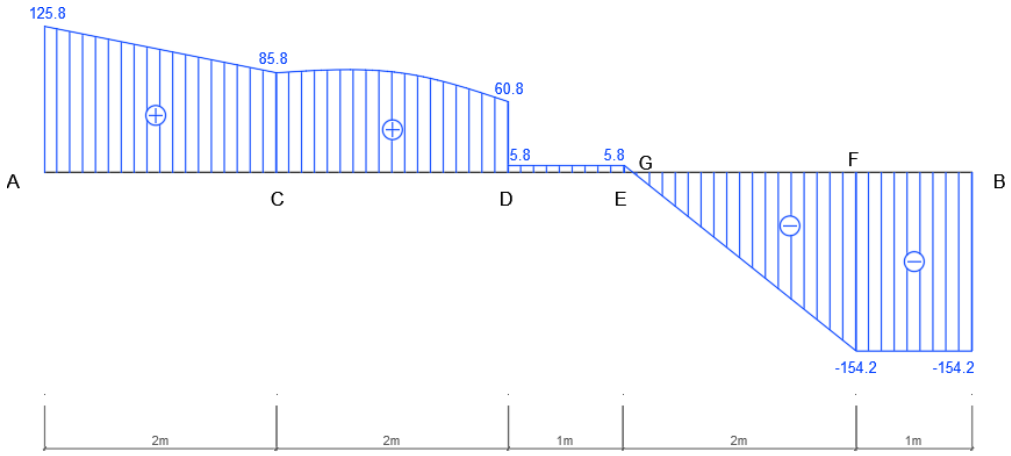
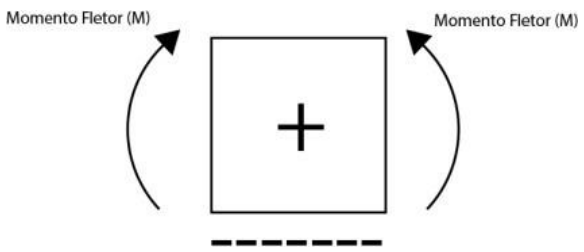


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

Para o traçado do diagrama de momento fletor, relembramos nossa convenção de sinais:



O momento em A será nulo, no entanto, em B, o momento não será nulo pois temos carga momento aplicada.

Em C: Pela área do cortante:

$$\frac{(125{,}85 + 85{,}85) \times (2)}{2} = 211{,}7\ \text{kN.m}$$

Em D: Não há como calcular a área do esforço cortante. Neste caso temos duas possibilidades: analisar a partir do lado direito ou fazer uma seção em D. Escolhendo a seção, temos, diretamente que:

$(125{,}8) \times 4 - ((40) \times (3) + (25) \times (0{,}667)) = 366{,}7\ \text{kN.m}$

Atente para o que acontece com a estrutura: A primeira parte deste cálculo é o momento gerado pela reação em A, que traciona as fibras do lado de baixo da estrutura, e, portanto, tem sinal positivo. A segunda parte corresponde às forças resultantes dos carregamentos distribuídos, que tracionam as fibras de cima da estrutura, e, portanto, são negativas.

Em E: Pela área do cortante: $366{,}7 + (5{,}8) \times (1) = 372{,}5\ kN.m$

Em G: Temos um ponto de momento máximo, que pela área do cortante:

372,5 + (5,8) × (0,07) = 372,7 $kN.m$

Em F: Pela área do cortante:

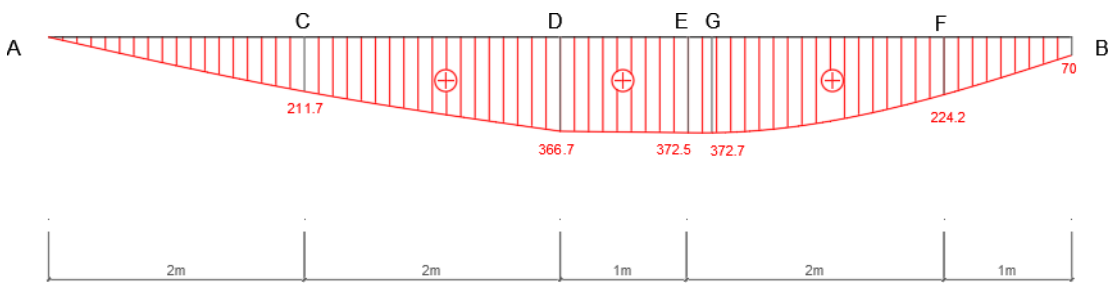
$$372{,}7 - \frac{(154{,}2) \times (1{,}93)}{2} = 224{,}2\ \text{kN.m}$$

Em B: Há duas formas de se pensar no valor do momento em B: seu valor obrigatoriamente será o do momento aplicado pois nos apoios o momento é nulo. A outra forma é calculá-lo pela área do cortante.

Vamos fazer das duas maneiras:

- Pela Área do Cortante: $224{,}2 - 154{,}2 \times 1 = 70\ \text{kN.m}$

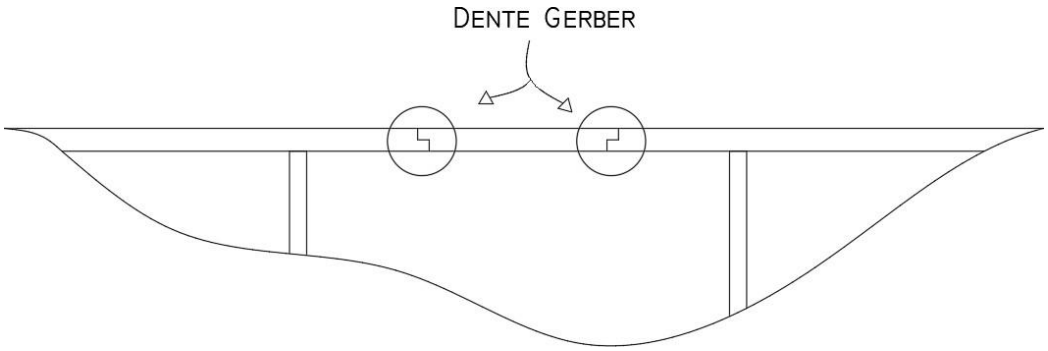
- Pela Lógica do Momento: Vindo pela esquerda, o momento de 70kN.m traciona as fibras do lado de baixo da estrutura, portanto, é positivo.



6. Vigas Gerber

As Vigas Gerber são vigas isostáticas formadas pela associação de diversas vigas biapoiadas ou em balanço, com trechos estáveis e instáveis, que chamamos de trechos com estabilidade própria e trechos sem estabilidade própria. Este arranjo estrutural faz com que as vigas transmitam forças verticais e horizontais entre si, mas não transmitam momentos.

Em geral, as Vigas Gerber são concebidas em grande parte em projetos de pontes e pré-moldados em geral, visto a facilidade de realizar a montagem. Na imagem abaixo, pode-se compreender o conceito da viga Gerber.

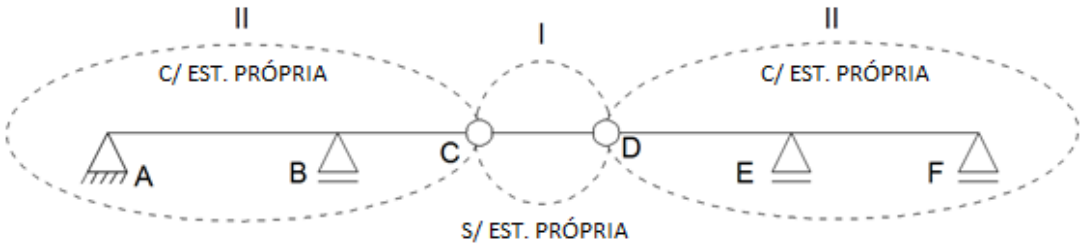


Os dentes Gerber, grifados na imagem acima, serão representados por rótulas internas em nossa análise.

Desmembramento de vigas gerber

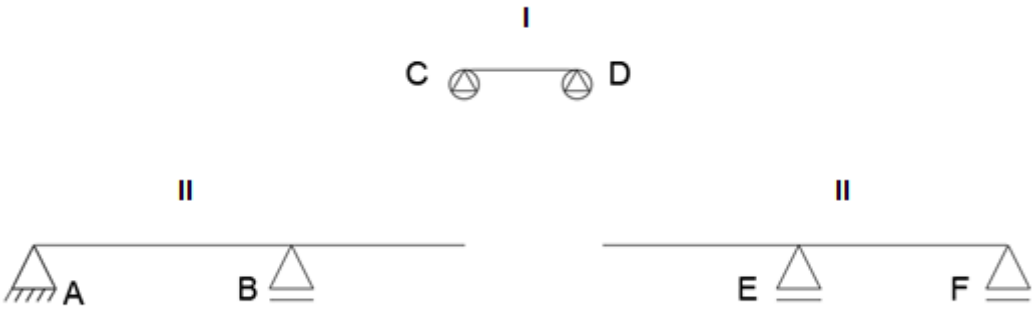
Para proceder com a solução das Vigas Gerber, faz-se necessário realizar o desmembramento da estrutura em trechos com e sem estabilidade própria. Procede-se da seguinte maneira:

Circular a estrutura de rótula em rótula:

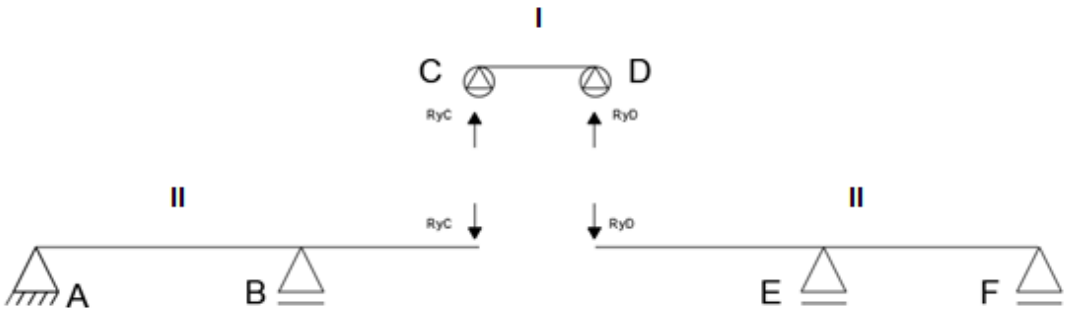


Na viga Gerber acima, o trecho com o algarismo romano “I”, corresponde a um trecho sem estabilidade própria, ou seja, um trecho que depende dos outros trechos para ficar estável e deve ser resolvido antes dos outros. Já os trechos com o algarismo romano “II”, são trechos com estabilidade própria, ou seja, que não dependem de outros trechos para ficarem estáveis, mas recebem as forças transmitidas pelo trecho I. Perceba, no entanto, que o trecho compreendido pela rótula D, apoios E, F, é um trecho sem estabilidade própria se sozinho, pois é hipostático, porém, a presença do trecho ADC confere estabilidade ao conjunto, pois está restringida.

Após separar a Viga nestes trechos, desmembramos o conjunto:



O próximo passo é encontrar as reações de apoio, começando sempre pelo trecho sem estabilidade própria. Após encontrar as reações de apoio, devemos transmitir as reações com sentido oposto da encontrada inicialmente, conforme imagem abaixo:



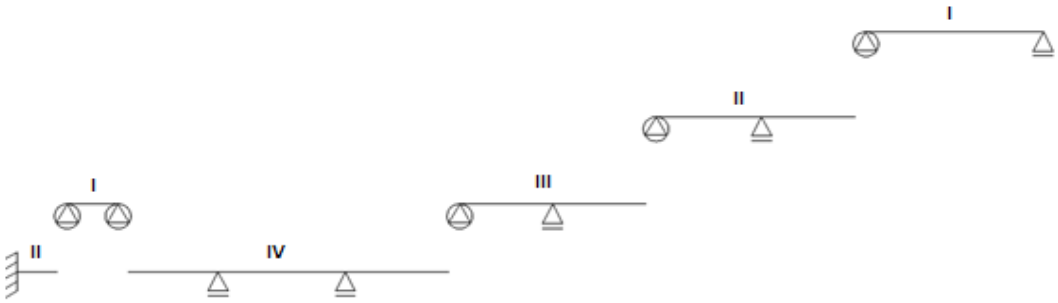
Em seguida, devemos resolver os diagramas de Esforço Normal, Cortante e Momento Fletor. Neste caso, podemos traçar os diagramas separadamente e juntar em seguida, ou traçar o diagrama diretamente sobre a viga toda.

EXEMPLOS DE DESMEMBRAMENTO

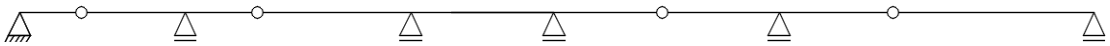
Exemplo 1

Dada a viga acima, separamos em trechos com e sem estabilidade:

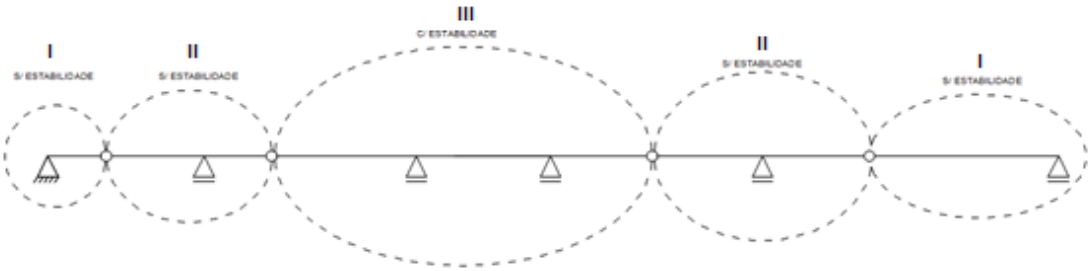
Em seguida, desmembramos, começando sempre pelo trecho menos estável, indo até o trecho mais estável.



Exemplo 2:



Dada a viga acima, efetuamos a separação em trechos com e sem estabilidade:



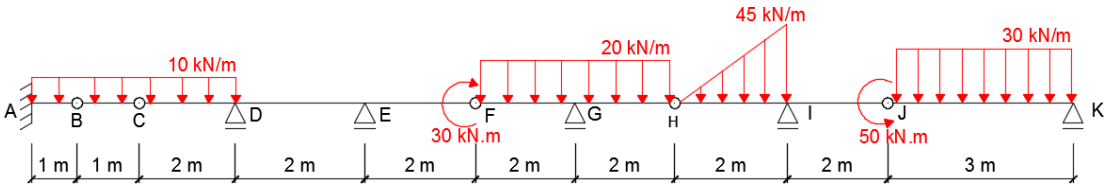
Em seguida, desmembramos, começando sempre pelos trechos sem estabilidade própria, até os com estabilidade própria:

O próximo passo consiste na obtenção das reações de apoio e traçado dos diagramas:

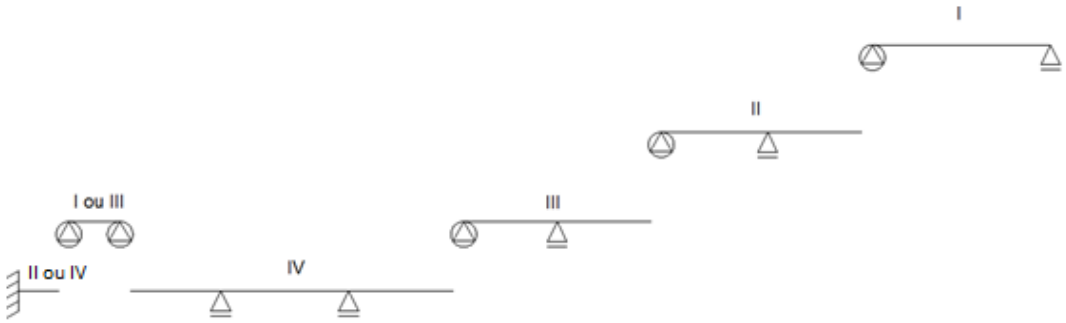
Solução de vigas gerber

EXEMPLO 1:

Utilizando o exemplo 1 acima desmembrado, vamos obter os diagramas de esforços internos para os seguintes carregamentos:



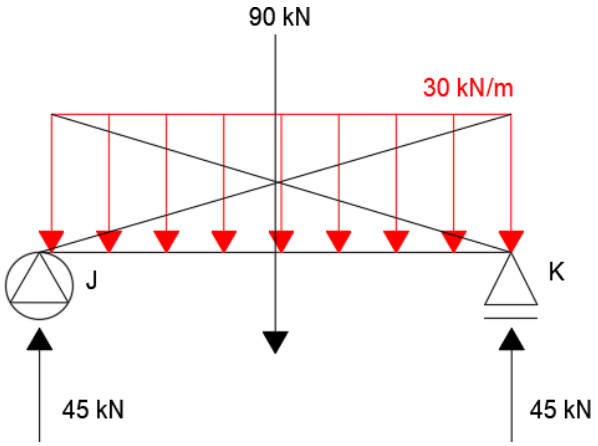
Aproveitando o desmembramento já efetuado anteriormente, vamos enumerar as vigas para efetuar a solução passo-a-passo:



O procedimento de solução é descrito abaixo:

Inicialmente, encontraremos as reações de apoio. No caso particular das vigas Gerber, existirão outras reações que serão transmitidas internamente pelas rótulas, no entanto, estas reações são passos intermediários para encontrar o real valor das reações de apoio e traçar os diagramas. Perceba que a numeração presente indica a ordem de solução das vigas. A viga enumerada com I e III, indica que sua solução pode ser feita no início, ou apenas quando quisermos ir para a viga IV, ela não depende de nenhum outro trecho para que encontremos suas reações internas.

Para a Viga I:

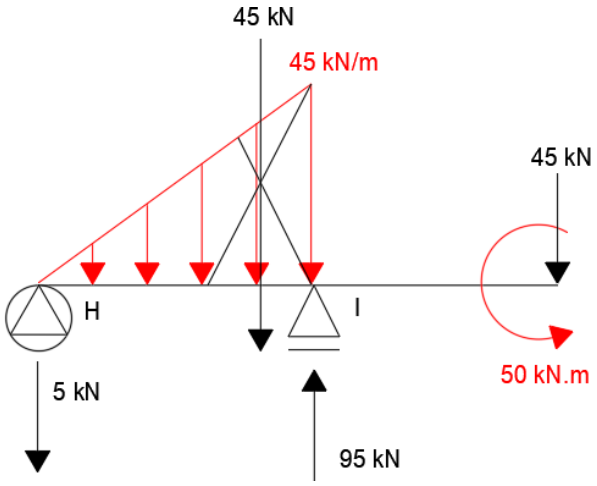


Utilizando o método da superposição dos efeitos: Sabemos que este vão mede três metros, e que a carga distribuída produz uma força resultante de 90 kN, que atua em seu centroide. Sem realizar cálculos, sabemos que os apoios estão sujeitos à mesma intensidade de força, o que nos permite afirmar que cada apoio reage com a metade da intensidade da força. No entanto, é válida a prova pelo método da superposição dos efeitos:

$$\mathrm{RyJ} = \mathrm{RyK} = \frac{90 \times 1{,}5}{3} = 45\ \mathrm{kN}$$

OBS.: É importante notar que a reação de 45kN para o apoio J será transmitida para a outra viga com sinal trocado, ou seja, com sentido oposto.

Para a Viga II:



Para o apoio I, utilizando as situações descritas para o cálculo de reações:

- Considerando a carga pontual de 45 kN:

$$\frac{45 \times 2}{2} + 45 = 90 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Considerando a carga momento:

$$-\frac{50}{2} = -25 \text{ kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Considerando a carga distribuída de 45 kN/m:

$$\left(\frac{45 \times 1{,}33}{2}\right) = 30 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

Logo $R\text{yL} = 90 + 30 - 25 = 95 \text{ kN}$

Para o apoio H, utilizando as situações descritas para o cálculo de reações:

- Considerando a carga pontual de 45 kN:

$$-\left(\frac{45 \times 2}{2}\right) = -45 \text{ kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Considerando a carga momento:

$$\frac{50}{2} = 25 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Considerando a carga distribuída de 45 kN/m:

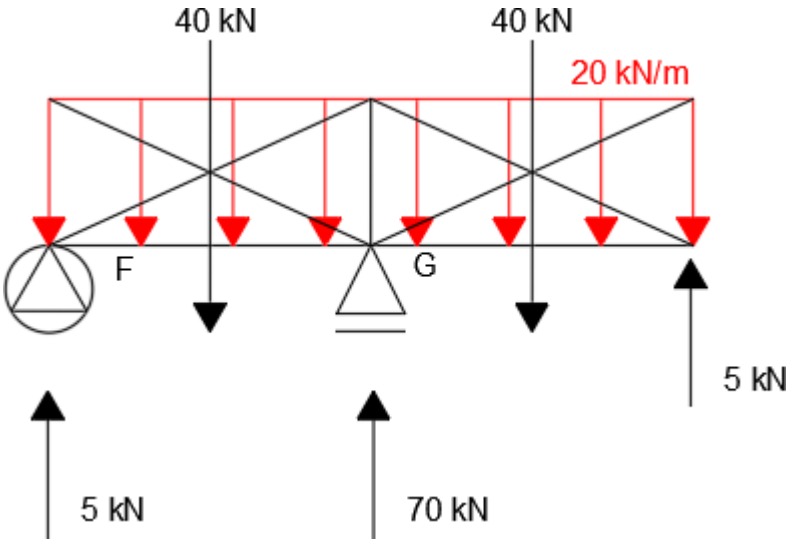
$$\left(\frac{45 \times 0{,}66}{2}\right) = 15\text{kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

Logo $\text{RyH} = -45 + 20 + 15 = -5\text{kN}$

OBS.: Note, novamente que a reação de apoio em H será transmitida com sinal trocado, ou seja, no sentido oposto.

Para a Viga III:



Para o apoio G, utilizando as situações descritas para o cálculo de reações:

- Para a carga pontual de 5 kN:

$$\left(\frac{5 \times 2}{2}\right) + 5 = -10\ kN$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Para a resultante do carregamento que atua no balanço, de 40 kN:

$$\left(\frac{40 \times 1}{2}\right) + 40 = 60 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Para a resultante do carregamento que atua no trecho biapoiado, de 40 kN:

$$\frac{40 \times 1}{2} = 20 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

Logo:

$$\text{RyG} = 60 + 20 - 10 = 70 \text{ kN}$$

Para o apoio F, utilizando as situações descritas para o cálculo de reações:

- Para a carga pontual de 5 kN:

$$\frac{5 \times 2}{2} = 5 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Para a resultante do carregamento que atua no balanço, de 40 kN:

$$-\frac{40 \times 1}{2} = -20\ kN$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Para a resultante do carregamento que atua no trecho biapoiado, de 40 kN:

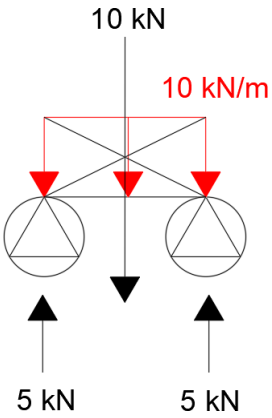
$$\frac{40 \times 1}{2} = 20 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

Logo

$$\mathrm{RyG} = 20 - 20 + 5 = 5\mathrm{kN}$$

Para a Viga I ou III (trecho entre duas rótulas):

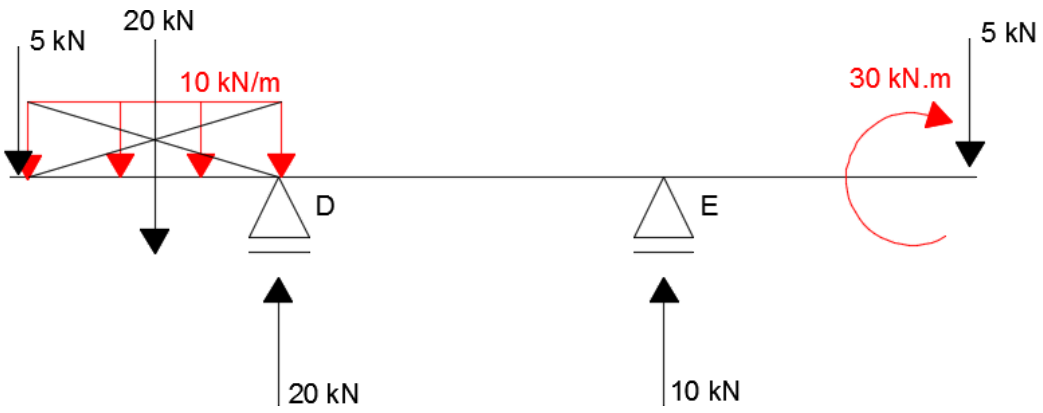


Utilizando o método da superposição dos efeitos: Sabemos que este vão mede um metro, e que a carga distribuída produz uma força resultante de 10 kN, que atua em seu centroide. Sem realizar cálculos, sabemos que os apoios estão sujeitos à mesma intensidade de força, o que nos permite afirmar que cada apoio reage com a metade da intensidade da força resultante. No entanto, é válida a prova pelo método da superposição dos efeitos:

$$\mathrm{RyJ} = \mathrm{RyK} = \frac{10 \times 0{,}5}{1} = 5\ \mathrm{kN}$$

OBS.: É importante notar que ambas as reações de 5kN serão transmitidas para a outra viga com sinal trocado, ou seja, com sentido oposto.

Viga IV:



Para o apoio D, utilizando as situações descritas para o cálculo das reações:

- Para a carga pontual de 5 kN:

$$\left(\frac{5 \times 2}{2}\right) + 5 = 10\ \text{kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Para a carga distribuída de 10 kN/m:

$$\left(\frac{20 \times 1}{2}\right) + 20 = 30\ \text{kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Para a carga momento de 30 kN.m:

$$\frac{30}{2} = 15\ \text{kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Para a carga pontual de 5 kN:

$$\frac{5 \times 2}{2} = 5\ \text{kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

Logo, a reação em D vale:

$10 + 30 - 15 - 5 = 20\text{kN} \ \therefore \ \text{RyD} = 20\ \text{kN}$

Para o apoio E, utilizando as situações descritas para o cálculo das reações:

- Para a carga pontual de 5 kN:

$$\frac{5 \times 2}{2} = 5\ \text{kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Para a carga distribuída de 10 kN/m:

$$\frac{20 \times 1}{2} = 10 \text{ kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

- Para a carga momento de 30 kN.m:

$$\frac{30}{2} = 15 \text{ kN}$$

Que aponta para cima, portanto, de valor positivo.

- Para a carga pontual de 5 kN:

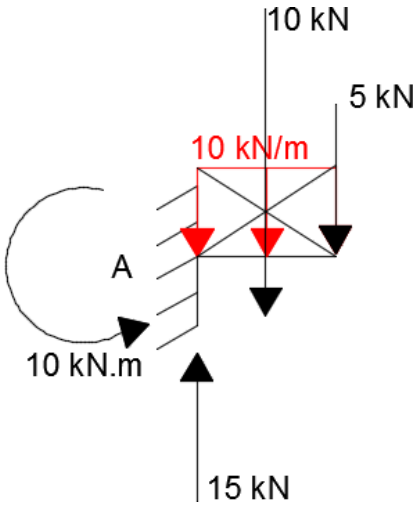
$$\left(\frac{5 \times 2}{2}\right) + 5 = 10 \text{ kN}$$

Que aponta para baixo, portanto, de valor negativo.

Logo, a reação em D vale:

$-5 - 10 + 15 + 10 = 10 \text{ kN} \therefore \text{RyD} = 10 \text{ kN}$

Viga V:



Utilizando as equações do equilíbrio de Newton:

$$\sum \mathbf{Fy} = \mathbf{0}$$

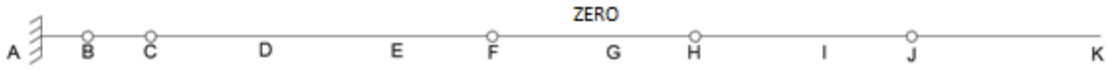
$-10 - 5 + \text{RyA} = 0 \therefore \text{RyA} = 15 \text{ kN}$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

$\text{M}_\text{A} - (10 \times 0{,}5) - (5 \times 1) = 0 \therefore \text{M}_\text{A} = 10 \text{ kN.m}$

Com todas as reações calculadas, o próximo passo é traçar os diagramas:

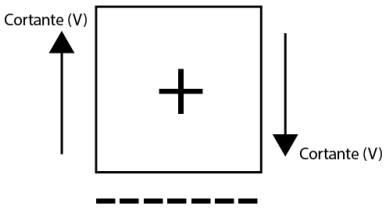
Diagrama de Esforço Normal (DEN)



O diagrama de esforço normal é nulo, pois não atuam forças inclinadas ou horizontais sobre a Viga Gerber em questão.

Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

Relembrando a convenção de sinais:



- **Em A:** Temos reação de apoio no valor de 15 kN, que aponta para cima, portanto, marcamos 15 para cima no diagrama.
- **Entre A e B:** Devido a carga distribuída, que produz resultante de 10 kN apontando para baixo, subtraímos dos 15 kN iniciais, obtendo 5 kN, e marcamos em B. Segundo as situações descritas, em cargas distribuídas retangulares, a variação do esforço cortante é linear, portanto, traçamos uma reta entre os pontos.
- **Entre B e C:** Assim como ocorre entre A e B, temos carga distribuída que gera resultante de 10 kN, que subtraímos dos 5 kN anteriores e obtemos -5 kN, marcando em C. Aqui surge um ponto de cortante nulo, o ponto L, que fica distante de A em 1,5 m.

$$\frac{15}{10} = 1{,}5 \text{ m}$$

- **Entre C e D:** Novamente, o trecho está sob ação de carga distribuída, que neste caso gera resultante de 20 kN. Portanto, subtraindo do valor anterior de -5 kN, obtemos – 25 kN que marcamos em D.
- **Em D:** Em D há um apoio com reação de 20 kN positivo, que somamos aos -25 kN, ficando com a quantia de -5 kN, que marcamos em D.
- **Entre D e E:** Este trecho é um trecho descarregado entre cargas, portanto, o esforço permanece constante até o ponto E.

- **Em E:** Em E há um apoio com reação de 10 kN positivo, que somamos ao -5 kN, obtendo o valor de 5 kN positivo.
- **Entre E e F:** Este é novamente um trecho descarregado entre cargas, portanto, o esforço permanece constante até o ponto F.
- **Entre F e G:** Há uma carga distribuída, que gera resultante de 40 kN para baixo, gerando em G um esforço de - 35 kN. Neste trecho surge um ponto de cortante nulo, o ponto M, que fica distante de F em 0,25 m.

$$\frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ m}$$

- **Em G:** Em G há um apoio com reação de 70 kN, que aponta para cima, portanto, a partir do valor anterior (-35 kN), somamos 70, e obtemos 35 kN, que marcamos em G.
- **Entre G e H:** Assim como entre F e G, atua uma carga distribuída, cuja resultante vale 40 kN. Logo, subtraindo 40 kN do valor anterior (35 kN), obtemos -5 kN, que marcamos em H. Entre G e H há também o ponto N, de momento máximo e cortante nulo, que fica distante de G em 1,75 m:

$$\frac{35}{20} = 1{,}75 \text{ m}$$

- **Entre H e I:** Neste trecho, há uma carga distribuída triangular, que produz uma resultante de 45 kN. Subtraímos do valor anterior (-5 kN) a quantia de 45 kN e obtemos -50 kN, que marcamos em I.

Lembrete: O gráfico do esforço cortante para cargas distribuídas triangulares será sempre uma parábola de segundo grau, e sua concavidade dependerá da forma como a carga estará aplicada.

- **Em I:** No apoio I, temos uma reação de 95 kN, que somada ao esforço cortante obtido no trecho compreendido por H e I (-50 kN), fornece como resultado o valor de 45 kN, que marcamos em I.
- **Entre I e J:** Temos um trecho descarregado entre cargas, portanto, segue constante o valor anteriormente obtido de 45 kN até o ponto J
- **Entre J e K:** No último trecho a ser analisado, temos uma carga distribuída que produz uma resultante de 90 kN. Subtraímos os 90 kN do valor em J (45 kN) e obtemos por fim o valor de -45 kN, que marcamos em K. Se o valor de - 45 kN for somado à reação em K, verifica-se que a soma é zero, e portanto, todo cálculo do esforço cortante está correto.
  Entre J e K ocorre um ponto de cortante nulo, o ponto O, que fica distante do ponto K a 1,5m:

$$\frac{45}{30} = 1{,}5 \text{ m}$$

Por fim, o diagrama de esforço cortante, deverá ser da seguinte maneira:

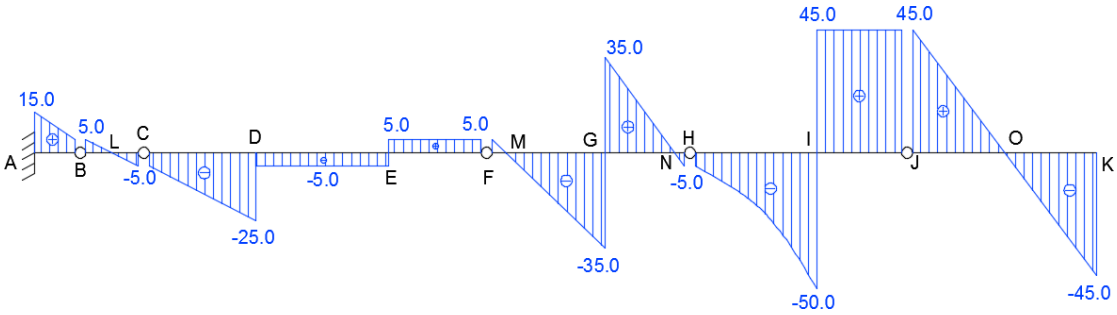
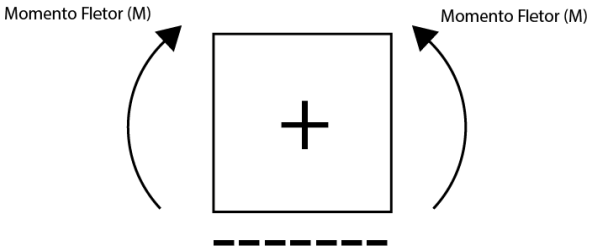


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

O diagrama de momento fletor nas Vigas Gerber tem algumas particularidades que exigem atenção. Para traçar o diagrama, dois métodos podem ser adotados: traçar o diagrama de cada viga separadamente, juntando todos no fim, ou traçar todo o diagrama de uma vez só.

Caso se opte pela primeira opção, o traçado será feito da mesma forma como era feito nas vigas simples. Entretanto, caso se opte pela segunda opção, é preciso saber que nas rótulas o momento será sempre zero, exceto se houver momento aplicado na rótula de um lado ou de outro ou em ambos os lados da rótula. Portanto haverá momento próximo à rótula apenas se houver um binário aplicado, e este, por sua vez, não poderá ser marcado sobre a rótula, mas sim sobre a haste na qual atua.

Neste exemplo, o diagrama será traçado todo de uma vez, começando pela esquerda - se o cortante for positivo, o fletor também será. Se for negativo, o fletor também será - e seguindo a convenção de sinais padrão adotada:



- **Entre A e B:** Temos o momento reativo de 10 kN.m, que traciona as fibras do lado superior da estrutura, então, marcamos o momento em A, seguindo uma parábola do segundo grau até a rótula em B, onde o momento será zero.
- **Entre B e C:** Neste caso, o momento entre B e C será um momento máximo, que ocorre no ponto L do diagrama de esforço cortante, a 0,5 m da rótula B e C. Seu valor pode ser calculado de duas maneiras: pela área do esforço cortante ou pela fórmula para viga simplesmente apoiada sob efeito de carga distribuída.

- Pela área do cortante:

$$\left(\frac{5\ \times 0{,}5}{2}\right) = 1{,}25\ \mathrm{kN.m}$$

- Pela fórmula:

$$\frac{\mathrm{ql}^2}{8} = \frac{10\ \times 1^2}{8} = 1{,}25\ \mathrm{kN.m}$$

- **Entre C e D:** Neste trecho, a viga está sob efeito de uma carga distribuída, então o gráfico será uma parábola de segundo grau. Pela área do esforço cortante podemos determinar o valor do momento fletor:

$$\frac{(25+5)\times 2}{2} = -30\ \mathrm{kN.m}$$

- **Entre D e E:** Pela área do cortante:

$$-30 - (5\ \times 2) = -40\ \mathrm{kN.m}$$

Que marcamos em D, e terá variação linear por ser um trecho descarregado entre cargas.

- **Entre E e F:** Neste trecho pode-se pensar de duas formas para traçar o diagrama de momento fletor, considerando o binário aplicado em F, ou pela área do esforço cortante.

- Pelo binário aplicado: Em F, atua um binário de 30 kN.m, que traciona as fibras do lado superior da estrutura, e portanto, tem valor negativo. Ou seja, o valor de - 30 deve ser marcado do lado esquerdo de F, mas nunca sobre F, pois F é uma rótula interna.

- Pela área do cortante:

$$-40 + (5\ \times 2) = -30\ \mathrm{kN.m}$$

- **Entre F e G:** No ponto M, temos um momento máximo, que pode ser calculado pela área do cortante:

$$\left(\frac{5\ \times 0{,}25}{2}\right) = 0{,}6\ \mathrm{kN.m}$$

Este valor deve ser marcado sobre o ponto M.

-Em G, temos outra variação no momento fletor, a ser calculada:

$$0{,}6 - \left(\frac{35 \times 1{,}75}{2}\right) = -30\ \text{kN.m}$$

-Em N temos novamente um ponto de momento máximo, a ser calculado:

$$-30 + \left(\frac{35 \times 1{,}75}{2}\right) = 0{,}6\ \text{kN.m}$$

Como todo o trecho está sob efeito de uma carga distribuída, basta ligar os pontos através de parábolas do segundo grau, lembrando que nas rótulas o momento é nulo.

- **Entre H e J:** Até o apoio I este trecho está submetido à uma carga distribuída triangular, em seguida se torna um trecho descarregado entre cargas, até o instante em que há um binário aplicado do lado esquerdo à rotula J.

  O valor do momento em I pode ser determinado fazendo-se uma seção no ponto I, ou vindo pela direita pela área do cortante. Neste trecho em especial, o trabalho é facilitado quando se analisa da direita para a esquerda.

  O binário aplicado em J traciona as fibras do lado de baixo da estrutura, portanto, é positivo e vale 50 kN.m

  Pela área do cortante, podemos determinar o valor do momento em I, lembrando que quando se analisa a estrutura pela direita o momento terá sinal oposto ao do cortante.

$$50 - (45 \times 2) = -40\ \text{kN.m}$$

  Então, ligamos H ao ponto I através de uma parábola de segundo grau, e o ponto I ao J através de uma reta. O momento de 50 kN deve ficar ao lado da rótula, e não sobre ela.

- **Entre J e K:** Assim como no trecho BC, podemos determinar o valor do momento de duas maneiras.

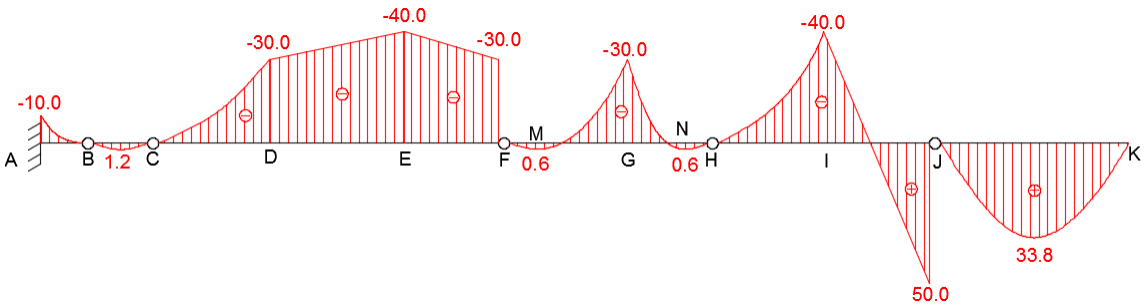
  - Pela área do cortante:

$$\frac{45 \times 1{,}5}{2} = 33{,}8\ \text{kN.m}$$

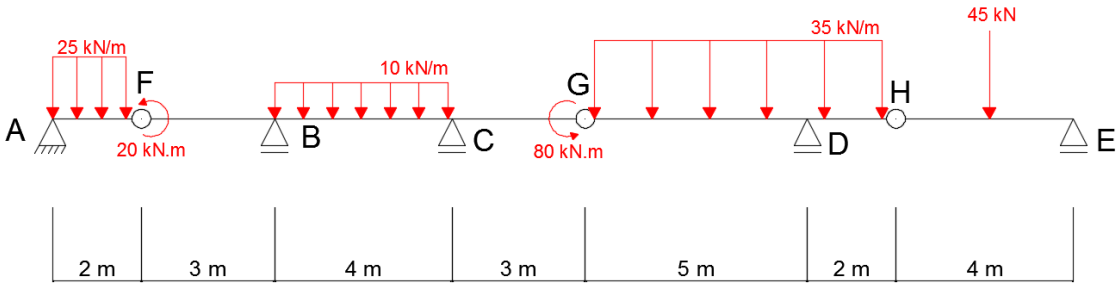
  - Pela fórmula:

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{30 \times 3^2}{8} = 33{,}8\ \text{kN.m}$$

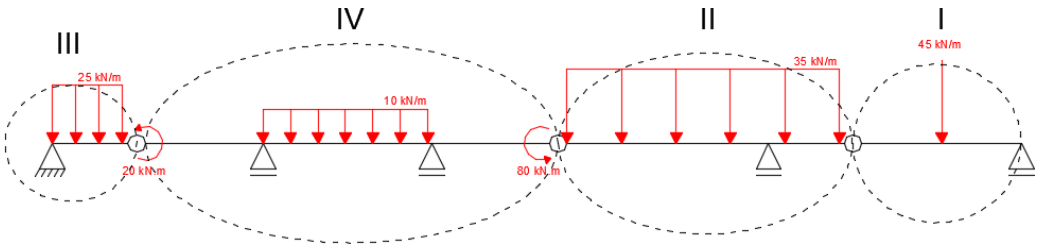
Por fim, o diagrama de momento fletor deverá ser da seguinte maneira:

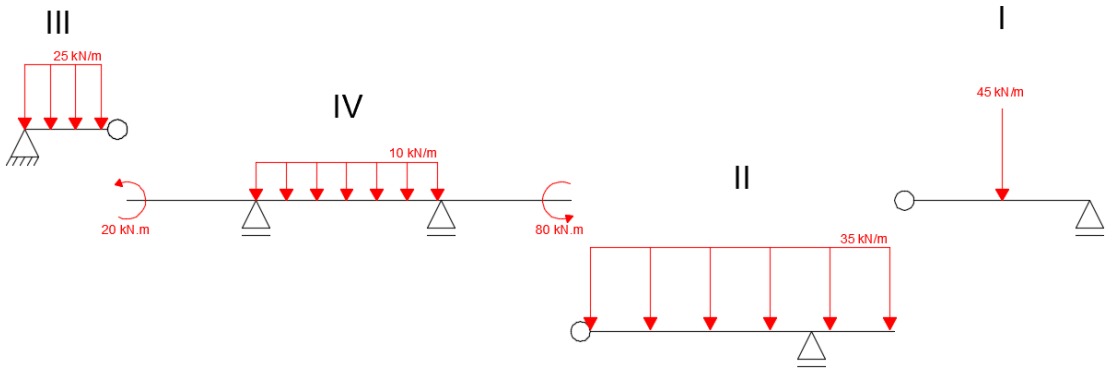


EXEMPLO 2:



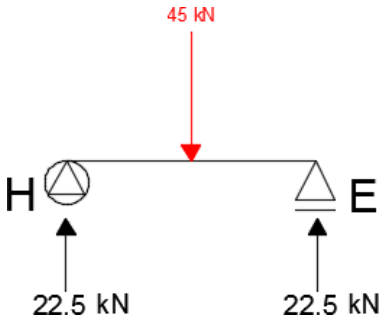
Desmembrando a viga acima:





Calculando as reações de apoio:

Viga I:

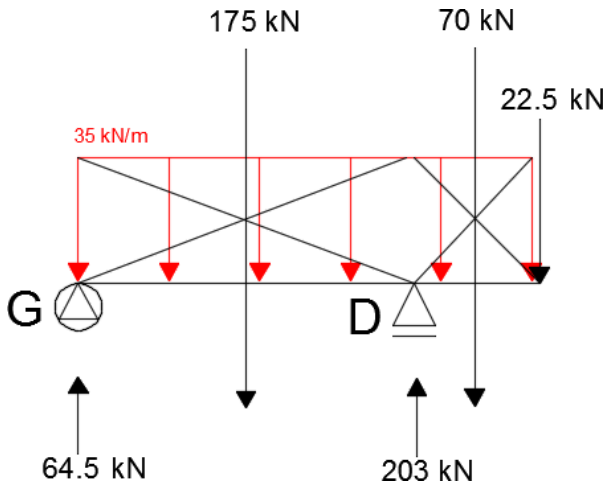


Como a carga de 45 kN está no meio da viga, sabemos, pelo método da superposição dos efeitos, que ambas as reações valerão metade do valor da carga, ou seja:

RyH: 22.5 kN

RyE: 22.5 kN

Viga II:



Para o cálculo de cada reação de apoio, serão consideradas as cargas da esquerda para a direita, e o método de cálculo será o da superposição dos efeitos.

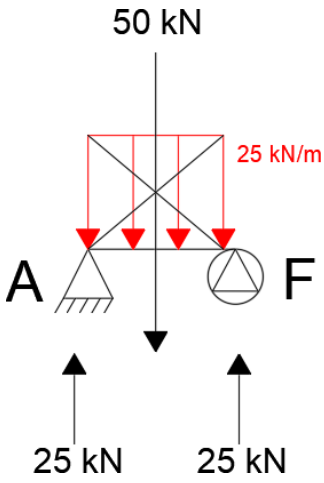
-Apoio G:

$$\left(\frac{175 \times 2{,}5}{5}\right) - \left(\frac{70 \times 1}{5}\right) - \left(\frac{22{,}5 \times 2}{5}\right) = 64{,}5 \text{ kN}$$

-Apoio D:

$$\left(\frac{175\ \times 2{,}5}{5}\right)+\left(\frac{70\ \times 1}{5}+70\right)+\left(\frac{22{,}5\ \times 2}{5}+22{,}5\right)=203\ \text{kN}$$

Viga III:



Assim como na viga I, a resultante do carregamento distribuído atua no meio da viga III, portanto, os apoios reagem ao carregamento da mesma maneira, produzindo reações de 25 kN cada.

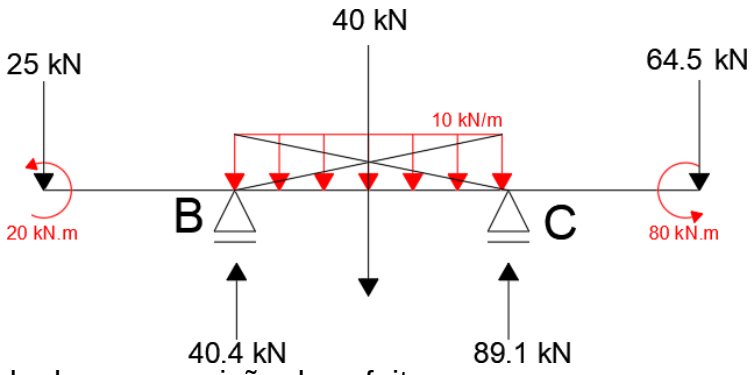
Portanto:

RyA: 25 kN

RyF: 25 kN

Sugestão: Cheque pelo método da superposição dos efeitos.

Viga IV:



Pelo método da superposição dos efeitos:

-Apoio B:

$$\left(\frac{20}{4}\right)+\left(\frac{25\ \times 3}{4}+25\right)+\left(\frac{40\ \times 2}{4}\right)+\left(\frac{80}{4}\right)-\left(\frac{64{,}5\ \times 3}{4}\right)=40{,}4\ \text{kN}$$

-Apoio C:

$$-\left(\frac{20}{4}\right)-\left(\frac{25\ \times 3}{4}\right)+\left(\frac{40\ \times 2}{4}\right)-\left(\frac{80}{4}\right)+\left(\frac{64{,}5\ \times 3}{4}+64{,}5\right)=89{,}1\ \text{kN}$$

Diagrama de Esforço Normal (DEN)

Como nenhuma força horizontal ou inclinada atua sobre a viga, o diagrama de esforço normal é zero.

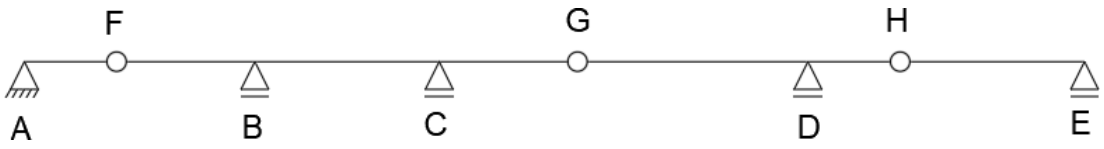


Diagrama de Esforço Cortante (DEC)

Os procedimentos para traçado do diagrama de esforço cortante e para encontrar a distância em que ocorre o esforço nulo, são os mesmos do exemplo anterior. Os cálculos e resultado final do diagrama são abaixo apresentados:

$V_A = 25{,}0\ \text{kN}$

$V_F = 25 - 50 = -25\ \text{kN}$

$V_{B(esq)} = -25\text{kN}\ (\text{trecho descarregado})$

$V_{B\,(dir)} = -25 + 40{,}4 = -15{,}4\ \text{kN}$

$V_{C\,(esq)} = 15{,}4 - 40 = -24{,}5\ \text{kN}$

$V_{c\,(dir)} = -24{,}5 + 89{,}1 = 64{,}5\ \text{kN}$

$V_G = 64{,}5\ (\ \text{trecho descarregado})$

$V_{D\,(desq)} = 64{,}5 - 175 = -110{,}5\ \text{kN}$

$V_{D\,(dir)} = -110{,}5 + 203 = 92{,}5\ \text{kN}$

$V_H = 92{,}5 - 70 = 22{,}5\ \text{kN}$

$V_L = 22{,}5 - 45 = -22{,}5\ \text{kN}$

$V_{E\,(esq)} = -22{,}5\ \text{kN}$

$V_{E\,(dir)} = -22{,}5 + 22{,}5 = 0\ \text{kN}$

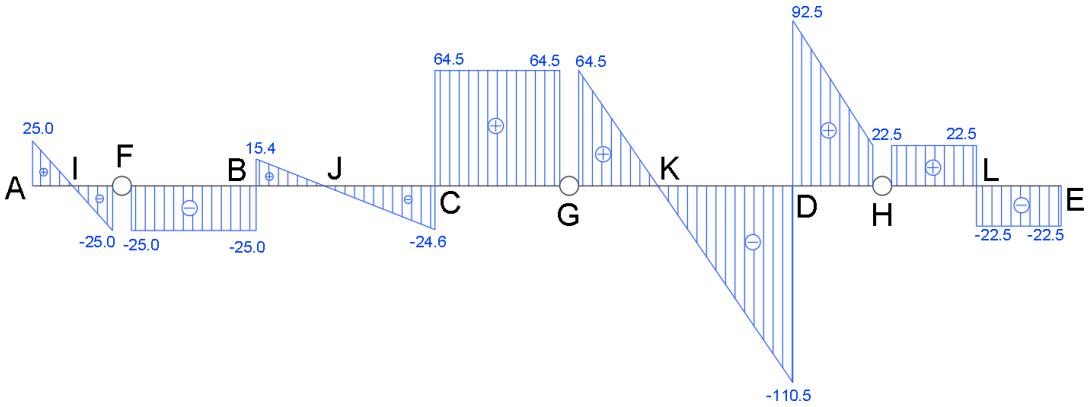


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

Os cálculos são apresentados abaixo, bem como, o diagrama de momento fletor:

$$M_I = \frac{25 \times 1}{2} = 12{,}5 \text{ kN.m}$$

$$M_{F\,(dir)} = -20 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -20 - (25 \times 3) = -95 \text{ kN.m}$$

$$M_{J\,(máx)} = -95 + \left(\frac{15{,}4 \times 1{,}54}{2}\right) = -83{,}2 \text{ kN.m}$$

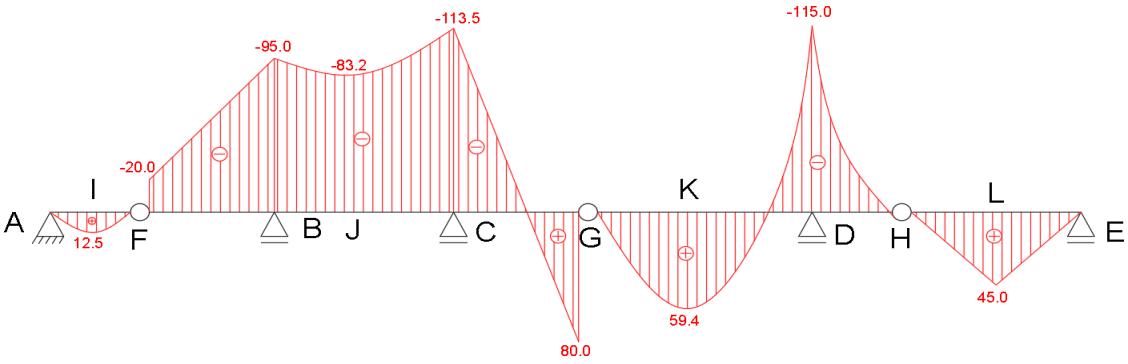
$$M_C = -83{,}2 - \left(\frac{24{,}6 \times 2{,}46}{2}\right) = -113{,}5 \text{ kN.m}$$

$$M_{G(esq)} = 80 \text{ kN.m}$$

$$M_{K(máx)} = \frac{64{,}5 \times 1{,}843}{2} = 59{,}4 \text{ kN.m}$$

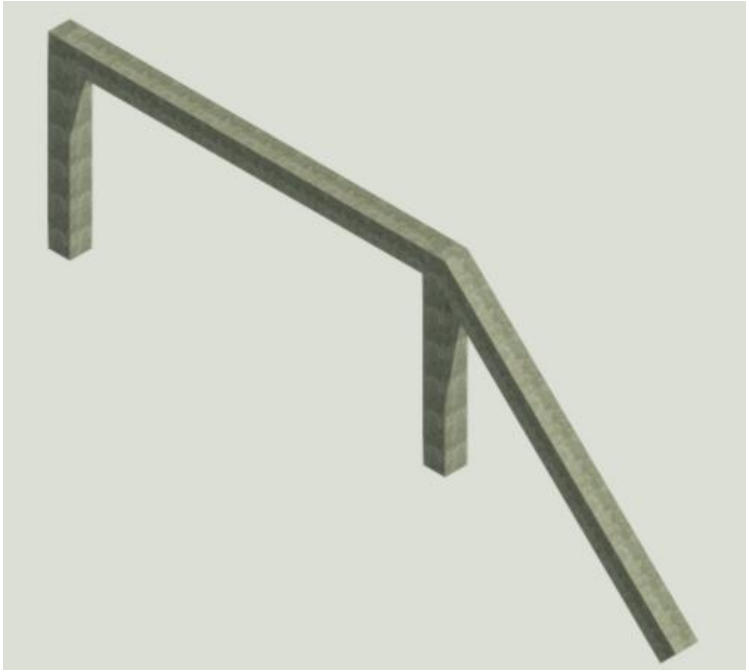
$$M_D = 59{,}4 - \left(\frac{110{,}5 \times 3{,}157}{2}\right) = -115{,}0 \text{ kN.m}$$

$$M_L = 22{,}5 \times 2 = 45 \text{ kN.m}$$



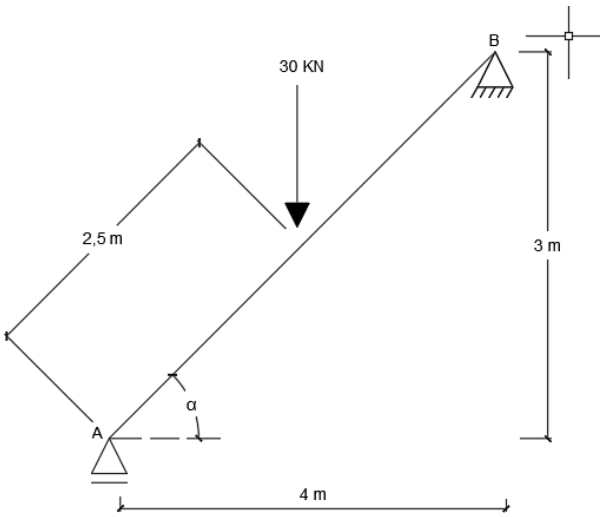
7. Vigas Inclinadas

Até agora foram apresentadas vigas, que são estruturas lineares, e, portanto, não há a necessidade de decomposição de esforços em outros planos. As vigas inclinadas apresentam um ângulo formando estrutura plana e são comumente encontradas em escadas, pórticos e treliças.

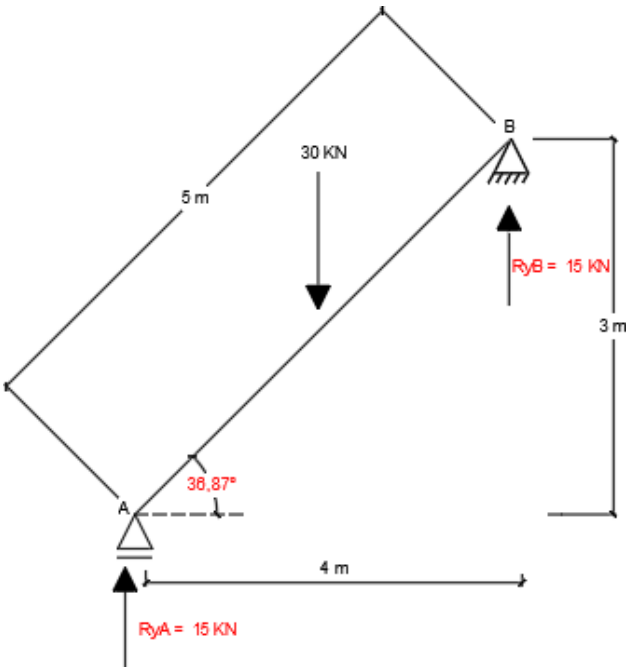


O processo para o traçado dos diagramas em vigas inclinadas consiste na obtenção das reações de apoio, e posteriormente na decomposição dos esforços em eixos ortogonais à viga, utilizando o ângulo formado com a horizontal. Como a viga é inclinada, não é aconselhável realizar os cálculos das reações de apoio através da superposição dos efeitos. Desta maneira, calcularemos as reações de apoio através das equações de equilíbrio de Newton e faremos seções ortogonais à viga e traçaremos os diagramas.

Viga Inclinada com carga pontual



Primeiramente, é importante encontrar o ângulo α através do arco tangente utilizando as cotas estabelecidas pelo problema. Segue-se com os cálculos das reações de apoio através das equações de equilíbrio.



$$\Sigma F_X = 0$$

$$R_{XB} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} + R_{YB} = 30$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_{YB} \times 4 - 30 \times 2 = 0$$

$$R_{YB} = 15\ \text{kN}$$

$$R_{YA} = 15\ \text{kN}$$

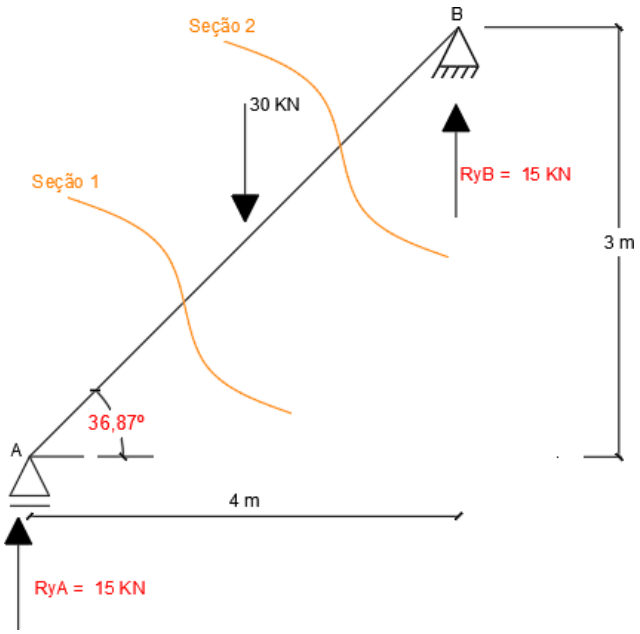
$$\alpha = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36{,}87°$$

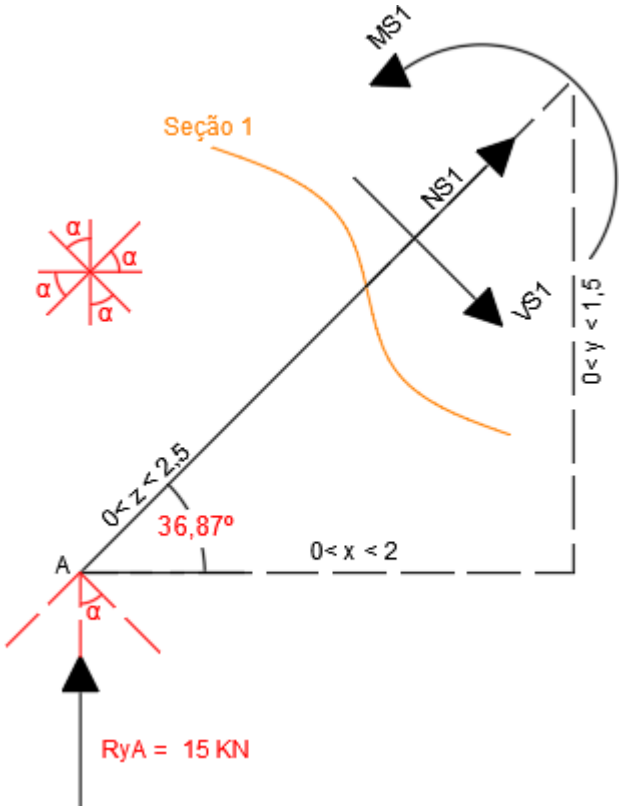
$$\sin\alpha = 0{,}600$$

$$\cos\alpha = 0{,}799$$

Em seguida, temos o diagrama de corpo livre da viga inclinada com o traçado de duas seções entre a carga aplicada.



Através do método das seções, encontraremos os esforços axiais, cortantes e momentos fletores para as seções em estudo. Definimos os intervalos nos eixos X e Y e no eixo que percorre a viga, o qual chamaremos de Z. Utilizamos o ângulo α para decompor as reações ao longo da viga e perpendicular a ela.



$$\boldsymbol{\alpha = 36,87°}$$

$$\sin\alpha = 0{,}600$$

$$\cos\alpha = 0{,}799$$

$$\boldsymbol{\Sigma F\ VS1 = 0}$$

$$-VS1 + 15 \times 0{,}799 = 0$$

$$VS1 = 11{,}985\ \text{kN}$$

$$\boldsymbol{\Sigma F\ NS1 = 0}$$

$$NS1 + 15 \times 0{,}600 = 0$$

$$NS1 = -9\ \text{kN}$$

$$\boldsymbol{\Sigma F\ MS1 = 0}$$

$$MS1 - 15 \times 0{,}799 \times z = 0$$

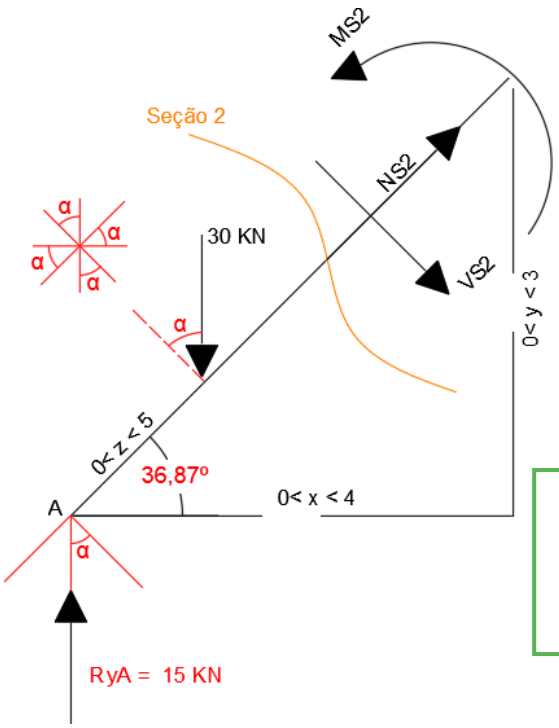
$$MS1 = 11{,}995 \times z\ \text{kN.m}$$

Com os esforços internos encontrados, aplicaremos os intervalos de X, Y e Z para determinar os diagramas de esforço normal, esforço cortante e momento fletor.

Em $x = y = z = 0$ $\rightarrow NS1 = -9kN$, $VS1 = 11{,}985$ e $MF = 0kN.m$

Em $x = 2$, $y = 1{,}5$ e $z = 2{,}5$ $\rightarrow NS2 = 9kN$, $VS1 = 11{,}985$ e $MF = 29{,}96kN.m$

Agora, determinaremos os esforços internos para a seção 2.



$\Sigma F\ VS2 = 0$

$-VS2 + 15 \times 0{,}799 - 30 \times 0{,}799 = 0$

$VS2 = -11{,}985\ kN$

$\Sigma F\ NS2 = 0$

$NS2 + 15 \times 0{,}600 - 30 \times 0{,}600 = 0$

$NS2 = 9\ kN$

$\Sigma F\ MS2 = 0$

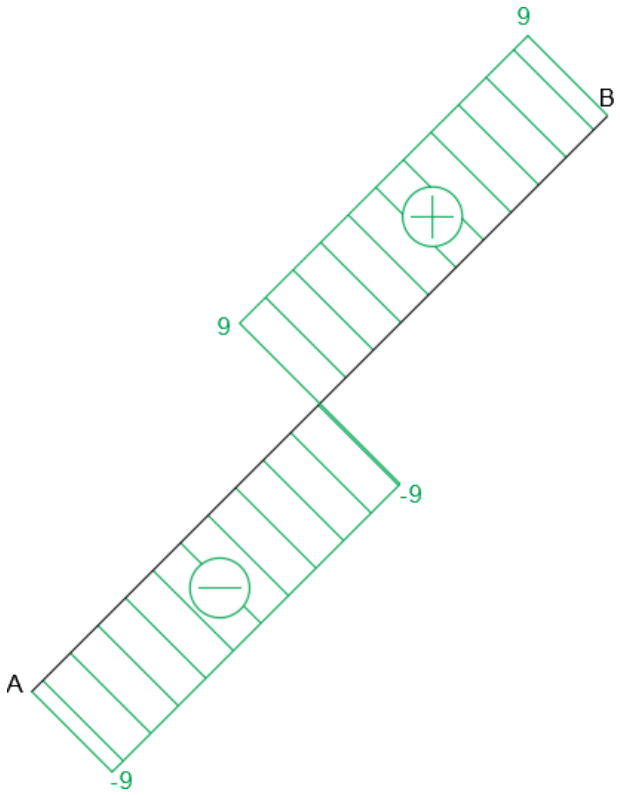
$MS2 + 15 \times 0{,}799 \times z + 30 \times 0{,}600 \times (z - 2{,}5) = 0$

$MS2 = -11{,}985 \times z + 59{,}925\ kN.m$

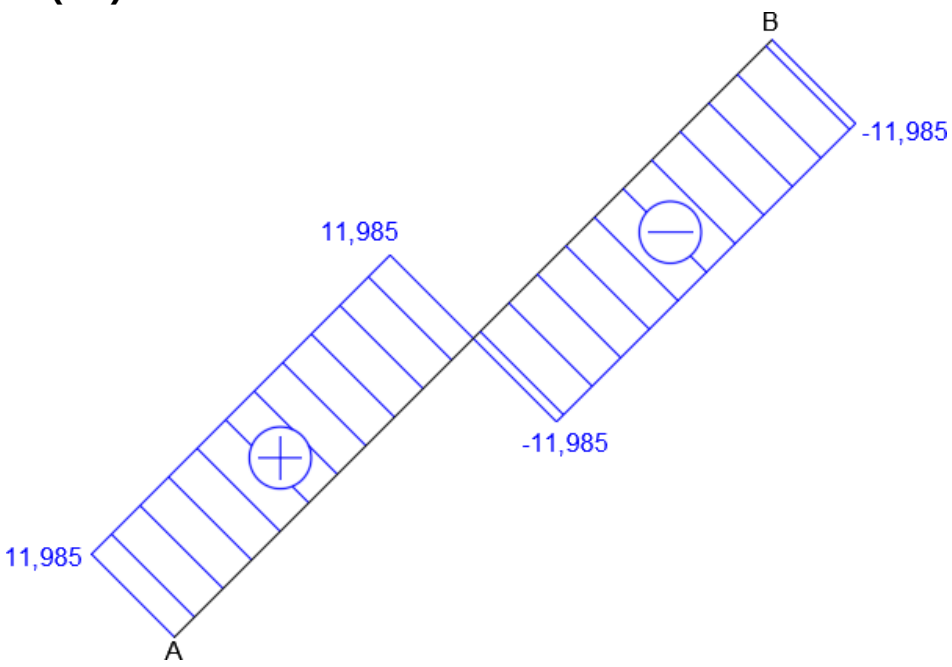
Em $x = 2$, $y = 1{,}5$ e $z = 2{,}5$ $\rightarrow NS2 = 9kN$, $VS2 = -11{,}985kN$ e $MF = 29{,}96kN.M$

A partir dos esforços encontrados em cada ponto da viga, podemos construir os diagramas de esforços internos da viga inclinada.

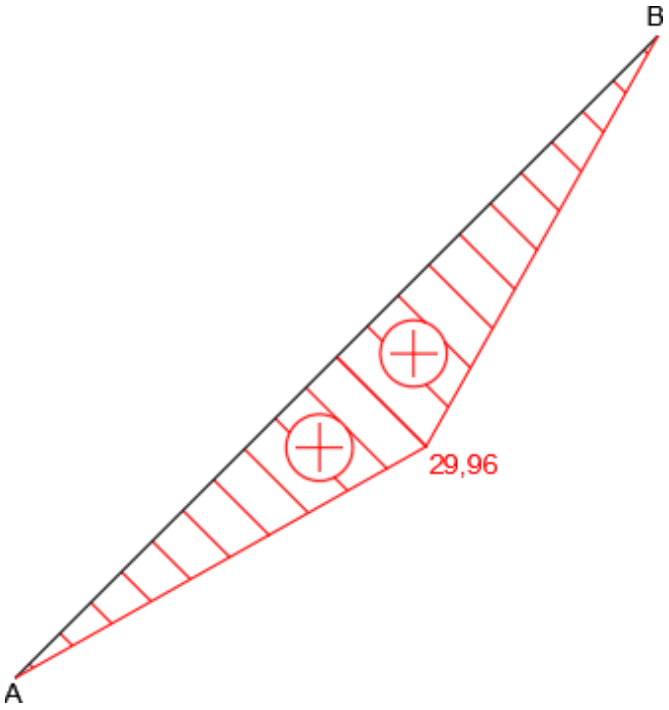
DEN (kN):



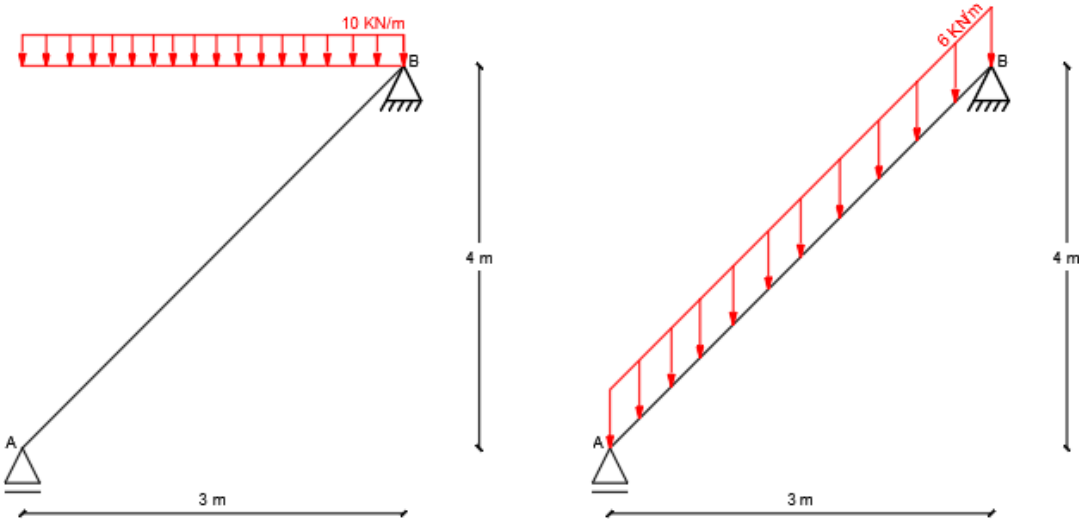
DEC (kN):



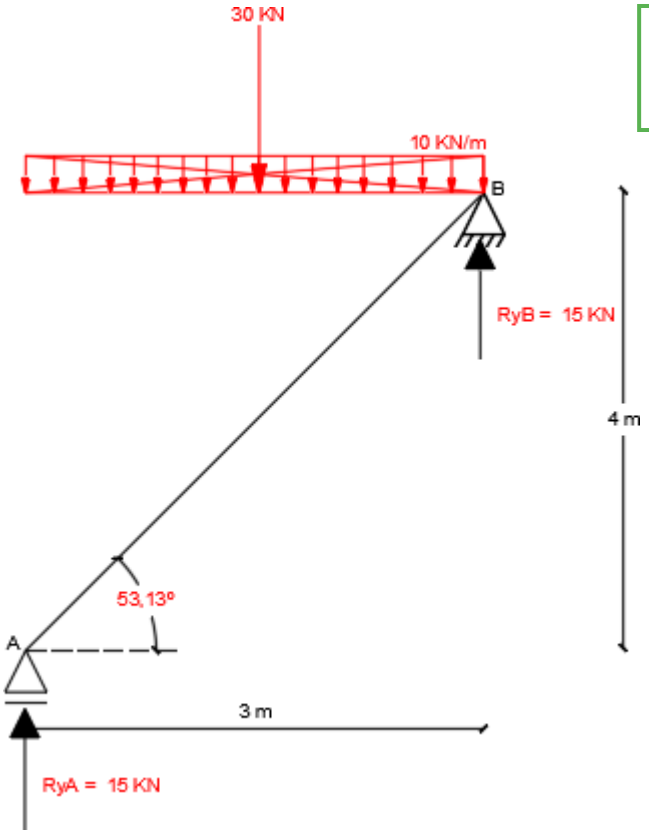
DMF (kN.m):



Viga inclinada com carga distribuída horizontalmente



Acima temos duas representações para a mesma viga inclinada com carga distribuída. Perceba que a carga está distribuída verticalmente ao longo da cota em X à esquerda e ao longo de Z à direita. Assim como fizemos no primeiro exemplo, primeiramente encontramos as reações de apoio em A e B e traçamos o Diagrama de Corpo Livre.



$$\Sigma F_X = 0$$

$$R_{XA} = 0$$

$$\Sigma F_Y = 0$$

$$R_{YA} + R_{YB} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_{YB} \times 3 - 30 \times 1,5 = 0$$

$$R_{YB} = 15\text{kN} \uparrow$$

$$R_{YA} = 15\text{kN} \uparrow$$

$$\alpha = \arctan\frac{4}{3}$$

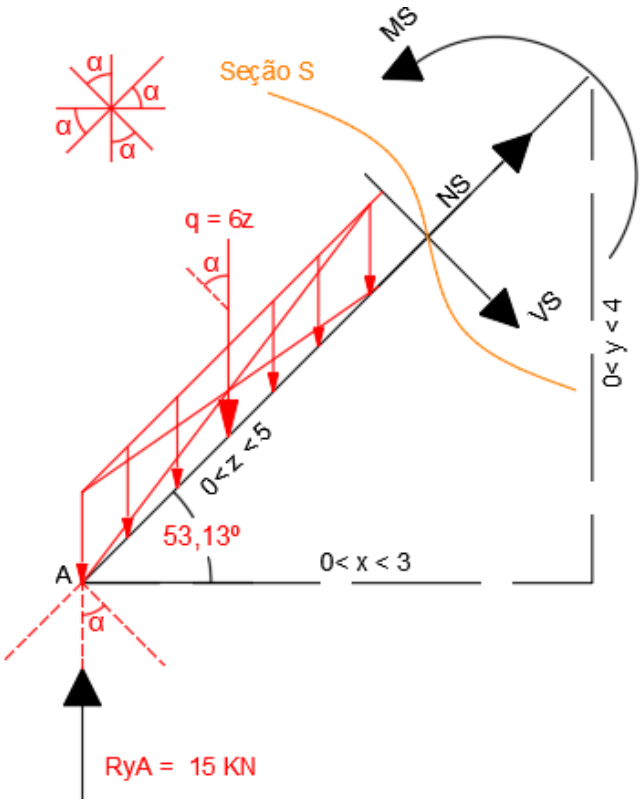
$$\alpha = 53,13°$$

$$\sin\alpha = 0,8$$

$$\cos\alpha = 0,6$$

Como ocorre somente uma carga distribuída ao longo de toda a viga, faremos somente uma seção S para a determinação dos esforços internos. Como demonstração, será utilizada a representação da viga com a carga distribuída ao longo de Z (eixo que percorre a viga inclinada).

A carga q da seção está localizada no meio da mesma (z/2) e terá o valor da carga distribuída multiplicada pela distância Z da seção.



$$\Sigma F\ VS = 0$$

$$-VS - 6 \times z \times 0,6 + 15 \times 0,6 = 0$$

$$VS = -3,6 \times z + 9$$

$$\Sigma F\ NS = 0$$

$$NS - 6 \times z \times 0,8 + 15 \times 0,8 = 0$$

$$VS = 4,8 \times z - 12$$

$$\Sigma F\ MS = 0$$

$$\mathrm{MS} + 6 \times \frac{z}{2} \times 0{,}6 - 15 \times \mathrm{z} \times 0{,}6 = 0$$

$$\mathrm{MS} = -1{,}8 \times z^2 + 9 \times \mathrm{z}$$

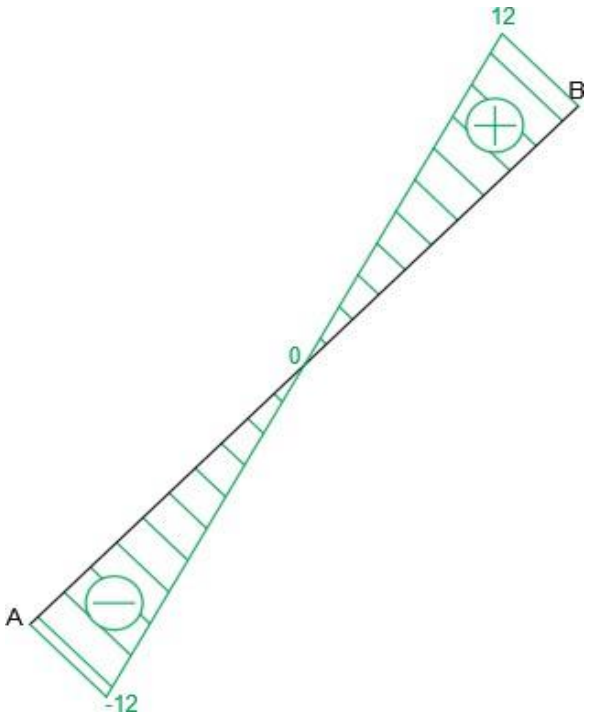
Em $\mathbf{x = y = z = 0} \rightarrow \mathrm{NS} = -12\mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = 9\mathrm{kN}$ e $\mathrm{MS} = 0\mathrm{kN.m}$

Em $\mathbf{x = 1,5,\ y = 2\ e\ z = 2,5} \rightarrow \mathrm{NS} = 0\mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = 0\mathrm{kN}$ e $\mathrm{MS} = 11{,}25\mathrm{kN.m}$

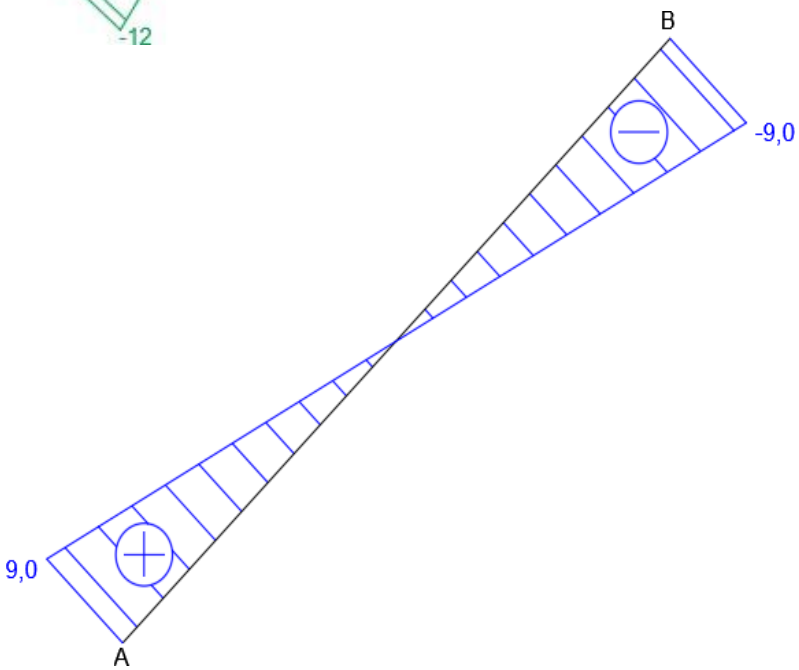
Em $\mathbf{x = 3,\ y = 4\ e\ z = 5} \rightarrow \mathrm{NS} = 12\mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = -9\mathrm{kN}$ e $\mathrm{MS} = 0\mathrm{kN.m}$

A partir dos esforços encontrados em cada ponto da viga, podemos construir os diagramas de esforços internos da viga inclinada.

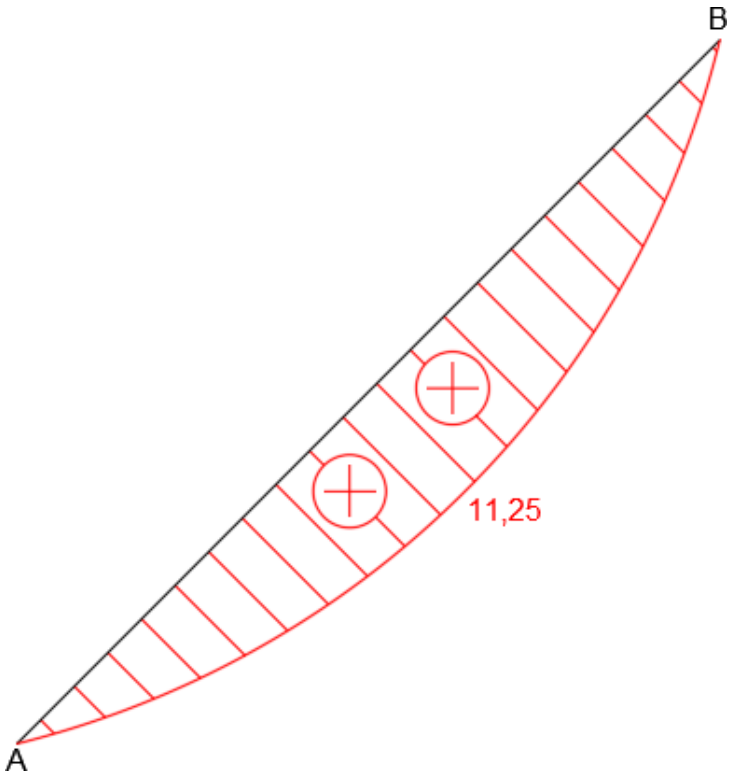
DEN (kN):



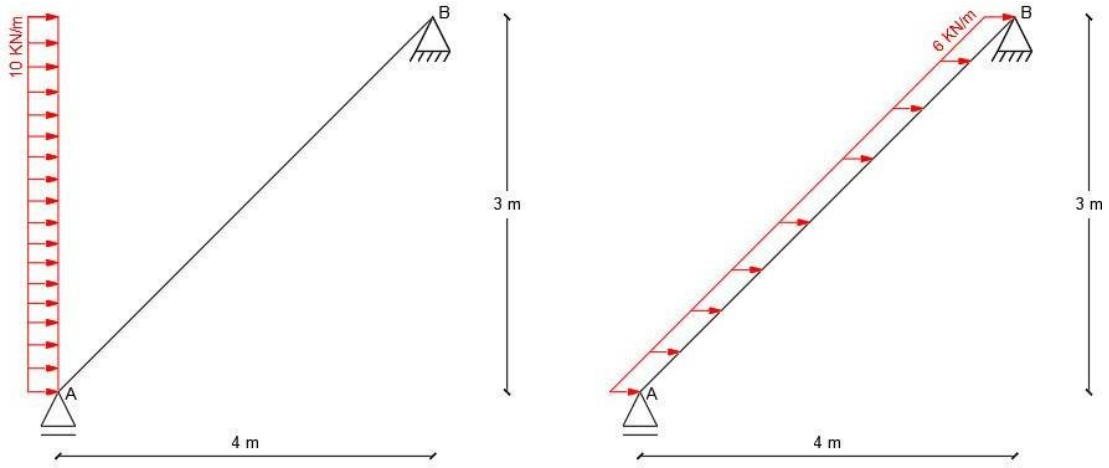
DEC (kN):



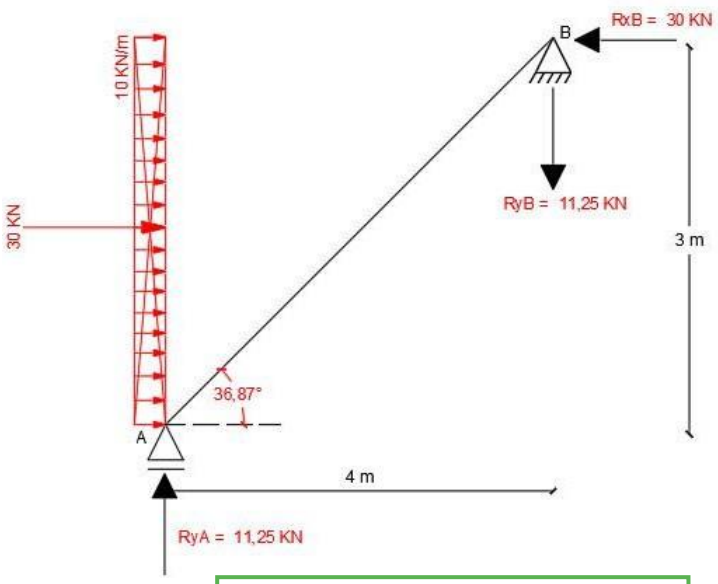
DMF (kN.m):



Viga inclinada com carga distribuída verticalmente



Acima temos duas representações para a mesma viga inclinada com carga distribuída. Perceba que a carga está distribuída horizontalmente ao longo de Y à esquerda e ao longo de Z à direita. Assim como fizemos no primeiro exemplo, primeiramente encontramos as reações de apoio em A e B e traçamos o Diagrama de Corpo Livre.



$$\alpha = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36{,}87°$$

$$\sin\alpha = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = 0{,}8$$

$$\mathbf{\Sigma F_X = 0}$$

$$R_{XB} = 30\text{kN} \leftarrow$$

$$\mathbf{\Sigma F_Y = 0}$$

$$R_{YA} + R_{YB} = 0$$

$$\mathbf{\Sigma M_A = 0}$$

$$R_{XB} \times 3 - 30 \times 1{,}5 + R_{YB} \times 4 = 0$$

$$R_{YB} = 11{,}25 \downarrow$$

Como ocorre somente uma carga distribuída ao longo de toda a viga, faremos somente uma seção S para a determinação dos esforços internos. Como demonstração, será utilizada a representação da viga com a carga distribuída ao longo de Y.

$$\mathbf{\Sigma F\ VS = 0}$$

$$-VS - 10 \times y \times 0{,}6 + 11{,}25 \times 0{,}8 = 0$$

$$VS = -6 \times y + 9$$

$$\mathbf{\Sigma F\ NS = 0}$$

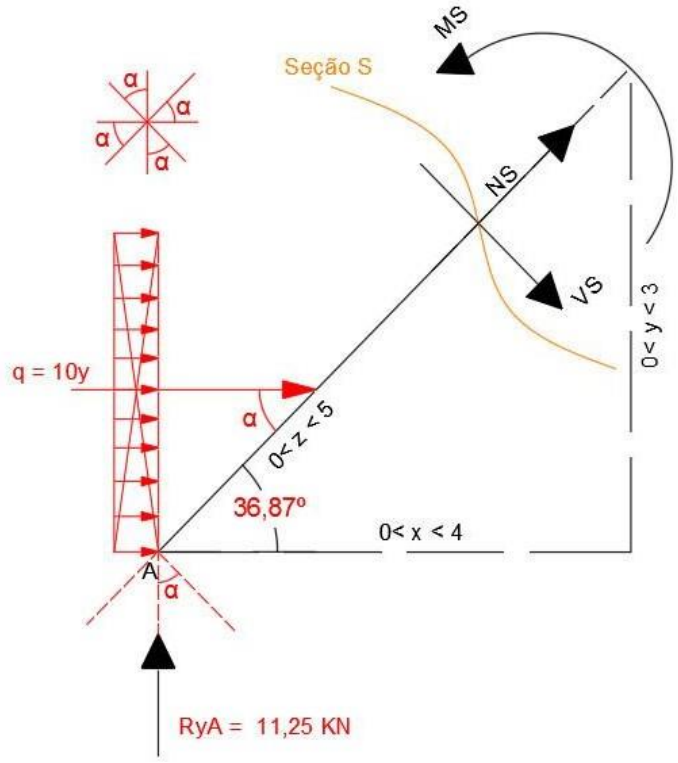
$$NS + 10 \times y \times 0{,}8 + 11{,}25 \times 0{,}6 = 0$$

$$NS = -8 \times y - 6{,}75$$

$$\mathbf{\Sigma F\ MS = 0}$$

$$MS + 10 \times \frac{y}{2} \times y - 11{,}25 \times y \times 0{,}8 = 0$$

$$MS = -5 \times y^2 + 9 \times z$$



Note que a equação para o momento fletor foi encontrada utilizando cotas em Z e Y, mas uma outra equação do momento fletor poderia ser $\mathrm{MF} = 11{,}25 \times \mathrm{x} - 5 \times \mathrm{y}^2$, utilizando cotas em Y e X.

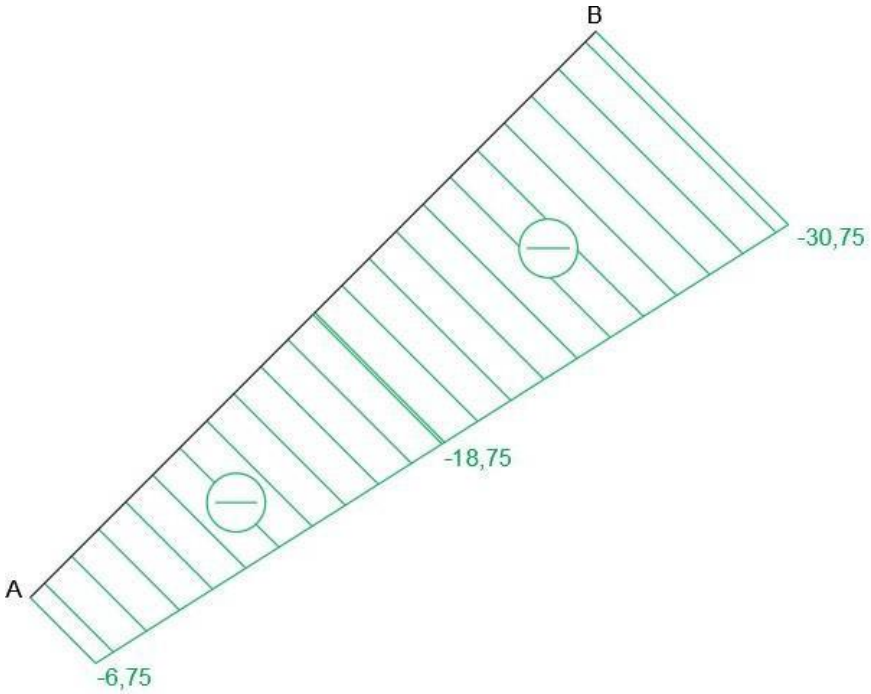
Em $\mathbf{x = y = z = 0}$ $\rightarrow \mathrm{NS} = -6{,}75\mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = 9\mathrm{kN},\ \mathrm{MS} = 0\mathrm{kN.m}$

Em $\mathbf{x = 2, y = 1{,}5}$ e $\mathbf{z = 2{,}5}$ $\rightarrow \mathrm{NS} = -18{,}75\ \mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = 0\mathrm{kN}$ e $\mathrm{MS} = 11{,}25\mathrm{kN.m}$

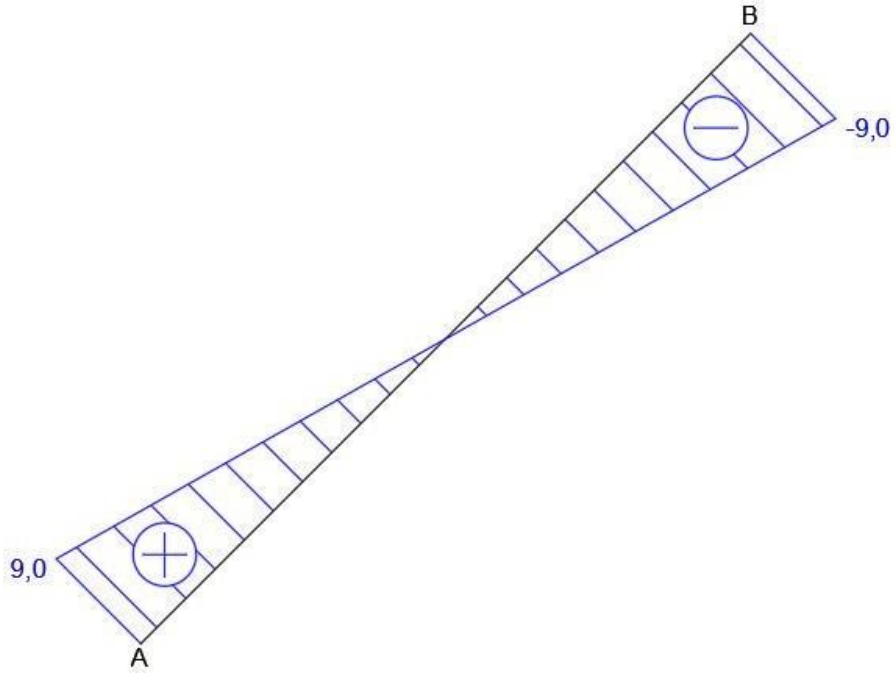
Em $\mathbf{x = 4, y = 3}$ e $\mathbf{z = 5}$ $\rightarrow \mathrm{NS} = -30{,}75\mathrm{kN},\ \mathrm{VS} = -9\mathrm{kN}$ e $\mathrm{MS} = 0\mathrm{kN.m}$

A partir dos esforços encontrados em cada ponto da viga, podemos construir os diagramas de esforços internos da viga inclinada.

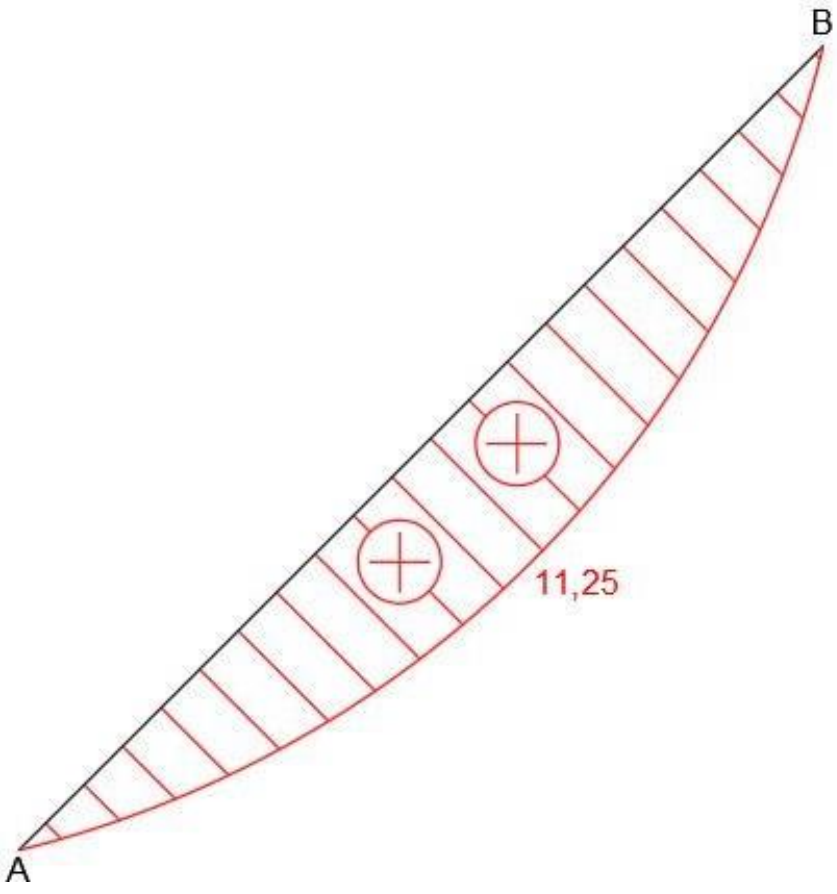
DEN (kN):



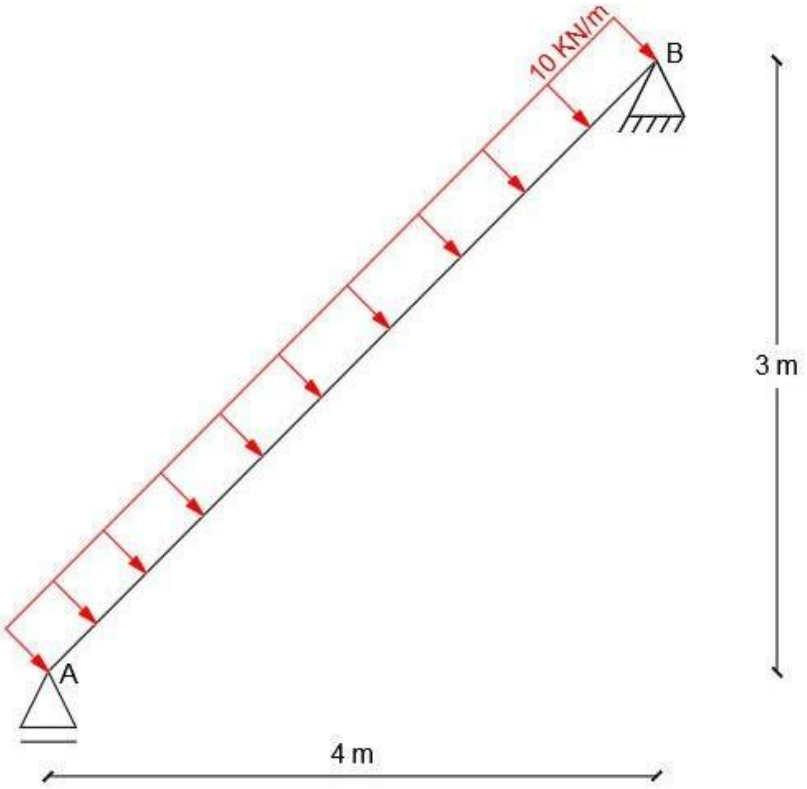
DEC (kN):



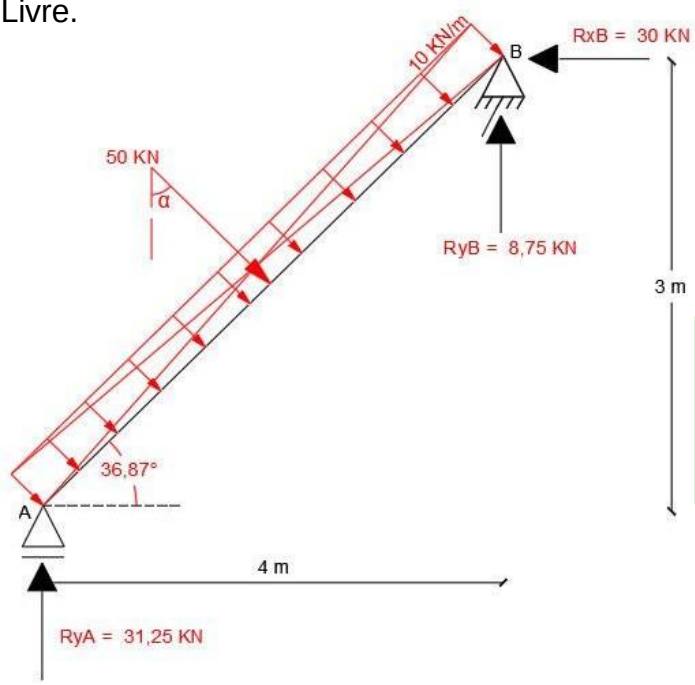
DMF (kN.m):



Viga inclinada com carga distribuída no próprio eixo



Acima temos a representação de uma viga com carga distribuída ao longo de seu próprio eixo (Z). Assim como foi feito anteriormente, primeiramente encontramos as reações de apoio em A e B e traçamos o Diagrama de Corpo Livre.



$$\alpha = \arctan\frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36{,}87°$$

$$\sin\alpha = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = 0{,}8$$

$$\mathbf{\Sigma F_Y = 0}$$

$$R_{YA} + R_{YB} - 50 \times 0{,}8 = 0$$

$$R_{YA} + R_{YB} = 40$$

$$\mathbf{\Sigma F_X = 0}$$

$$R_{XB} = -30\text{kN} \leftarrow$$

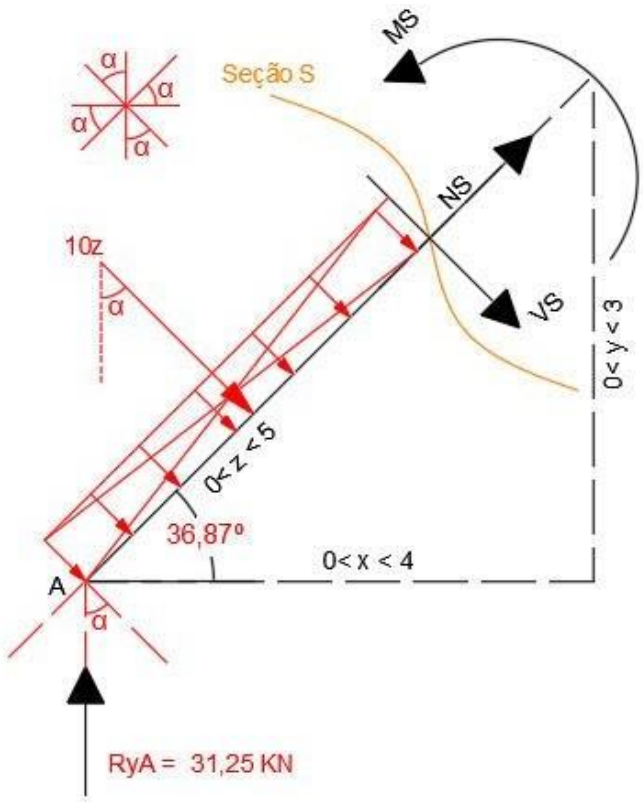
$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_{XB} \times 3 - 50 \times 2{,}5 + R_{YB} \times 4 = 0$$

$$R_{YB} = 8{,}75 \uparrow$$

$$R_{YA} = 31{,}25 \uparrow$$

Como ocorre somente uma carga distribuída ao longo de toda a viga, faremos somente uma seção S para a determinação dos esforços internos.



$$\Sigma F\ VS = 0$$

$$-VS - 10 \times z + 31{,}25 \times 0{,}8 = 0$$

$$VS = -10 \times z + 25$$

$$\Sigma F\ NS = 0$$

$$NS + 31{,}25 \times 0{,}6 = 0$$

$$NS = -18{,}75kN$$

$$\Sigma F\ MS = 0$$

$$MS + 10 \times z \times \frac{z}{2} - 31{,}25 \times x = 0$$

$$MS = 31{,}25 \times x - 5 \times z^2$$

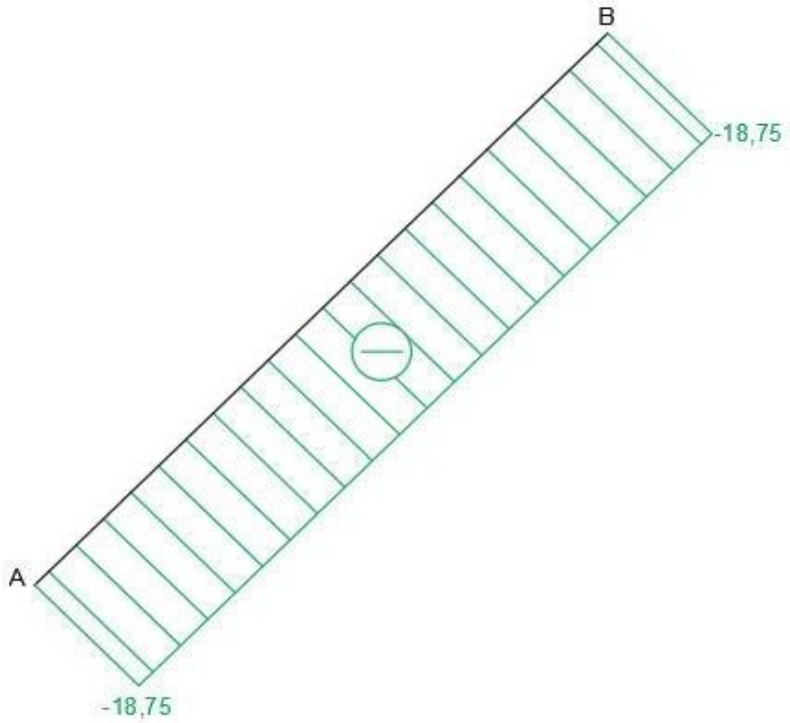
Em $x = y = z = z \rightarrow NS = 18{,}75kN,\ VS = 25kN$ e $MS = 0kN.m$

Em $x = 2, y = 1{,}5$ **e** $z = 2{,}5 \rightarrow NS = -18{,}75kN,\ VS = 0kN$ e $MS = 31{,}25kN.m$

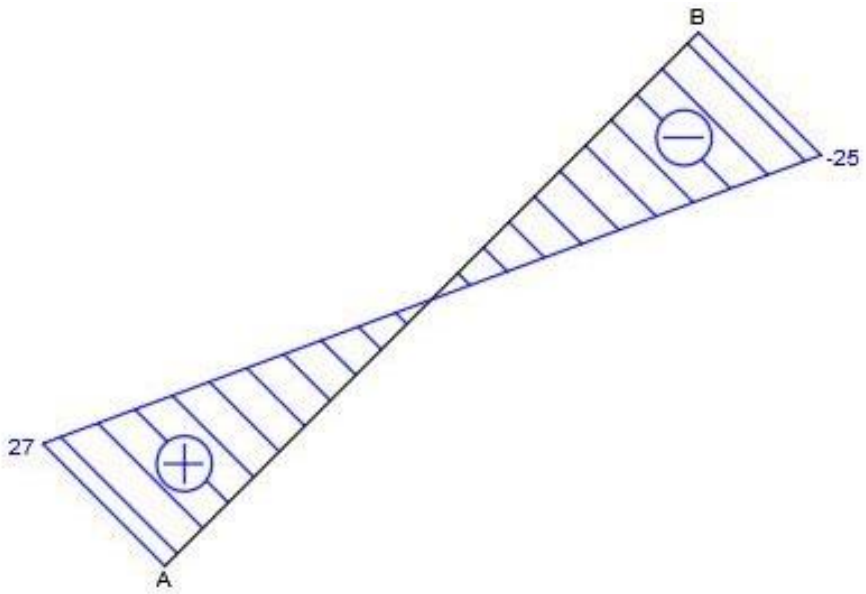
Em $x = 4, y = 3$ **e** $z = 5 \rightarrow NS = -18{,}75kN,\ vs = -25kN$ e $MS = 0kN.m$

A partir dos esforços internos encontrados em cada ponto da viga, podemos construir os diagramas de esforços internos da viga inclinada.

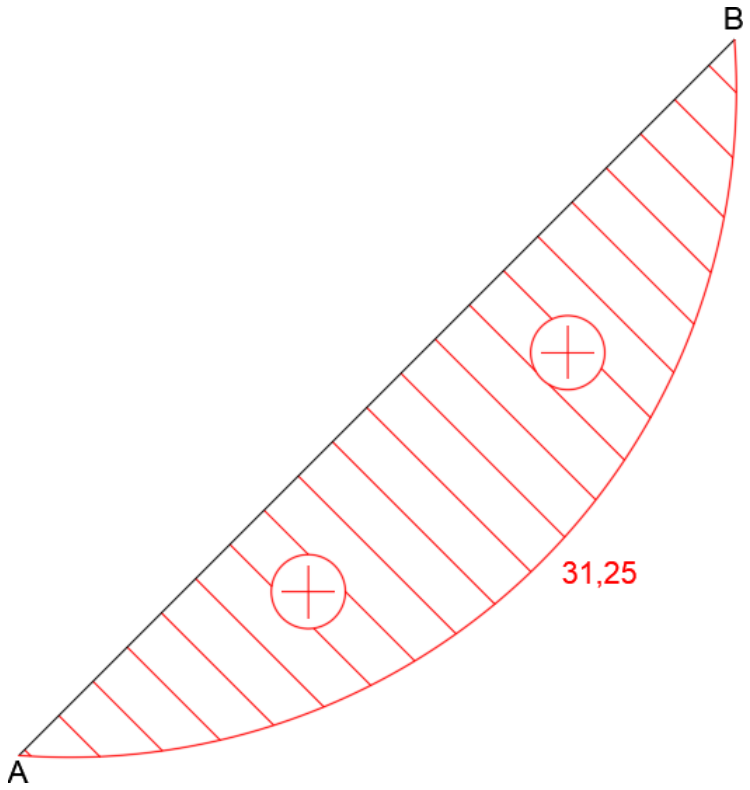
DEN (kN):



DEC (kN):



DMF (kN.m)



8. Pórticos

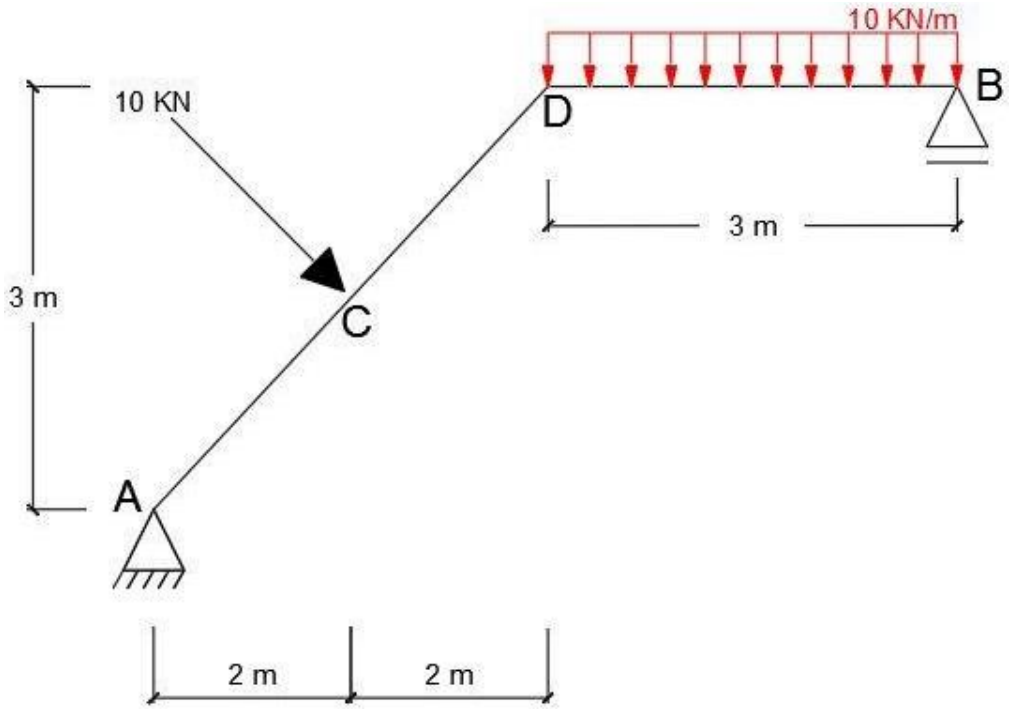
Pórtico é comumente definido na arquitetura como a área ou local com a entrada de uma edificação coberta, normalmente uma estrutura alta e elevada por pilares ou paredes. Na Engenhara Civil, chamaremos de pórtico toda estrutura constituída por barras retas, ligadas entre si por engastes ou rótulas internas, formando um plano.

Figura 2 Pórtico na entrada do Panteão em Roma

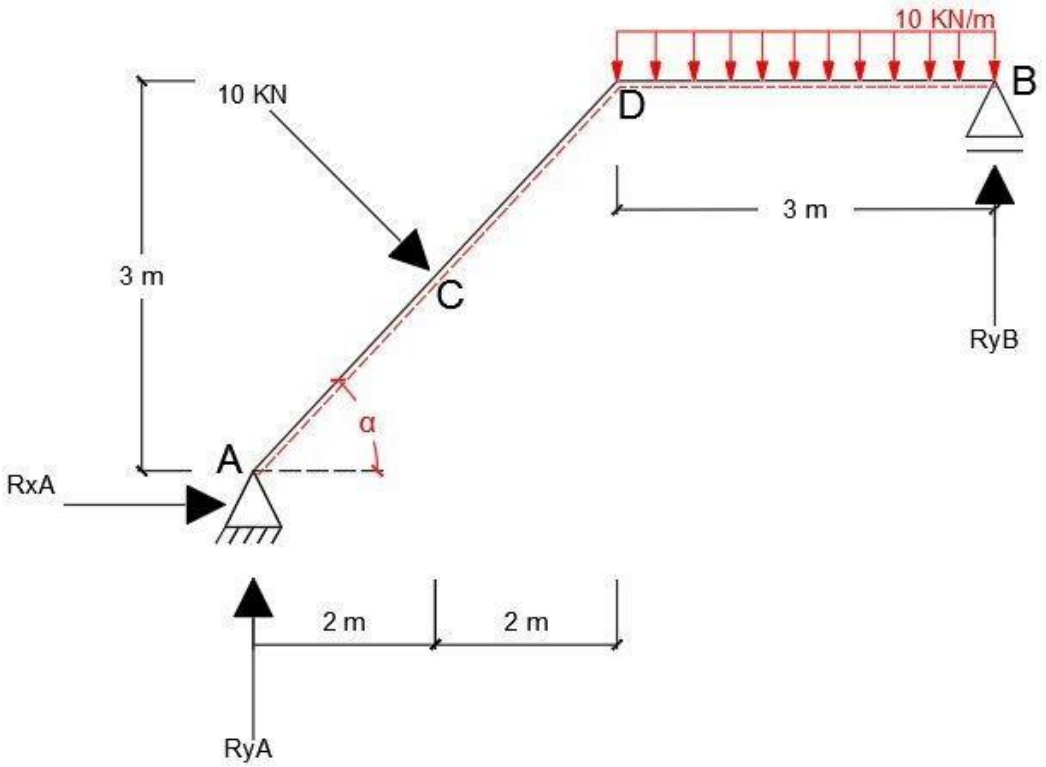
Nesta apostila, trataremos de pórticos planos bidimensionais e isostáticos, dando ênfase aos tri-articulados. É importante para a resolução dos exercícios, estarem bem definidas e treinadas as 4 situações do traçado dos diagramas de esforços internos já estudadas previamente.

Nos capítulos anteriores, na resolução de vigas simples e vigas Gerber, vimos que o traçado do diagrama de momento fletor deve seguir a convenção adotada na Engenharia Civil, onde o lado considerado positivo é o lado de baixo da viga horizontal. Nos pórticos, seguiremos esse mesmo caminho, porém, na resolução dos exercícios, é o calculista que determina em que lado de cada barra se encontram as fibras do lado de baixo da haste em questão. Assim, é comum que o traçado dos diagramas de esforço normal e esforço cortante sejam tracejados para lados diferentes. O que nunca mudará serão os seus valores e sinais. O digrama de momentos fletores é **sempre traçado** do lado das fibras **tracionadas**. Portanto tais diagramas estarão sempre do mesmo lado, o tracionado, independente do tracejado adotado. O que pode variar é o seu sinal.

Pórtico com barra inclinada



Primeiramente devemos encontrar as reações de apoio e definir onde se encontram as fibras, superiores e inferiores, de cada uma das barras do pórtico. Para este primeiro caso, vamos considerar as fibras do lado de baixo como sendo as mostradas na figura



A linha tracejada em vermelho é obrigatória e representa o lado de baixo em cada barra.

$\alpha = \arctan \frac{3}{4}$

$\alpha = 36{,}87°$

$\text{Sin}\alpha = 0{,}6$

$\text{Cos}\alpha = 0{,}8$

$\sum \mathbf{Fx = 0}$

$\text{RxA} + 10(0{,}06) = 0$

$\text{RxA} = -6\text{kN} \leftarrow$

$\sum \mathbf{Fy = 0}$

$\text{RyA} + \text{RyB} - 10(0{,}8) - 30 = 0$

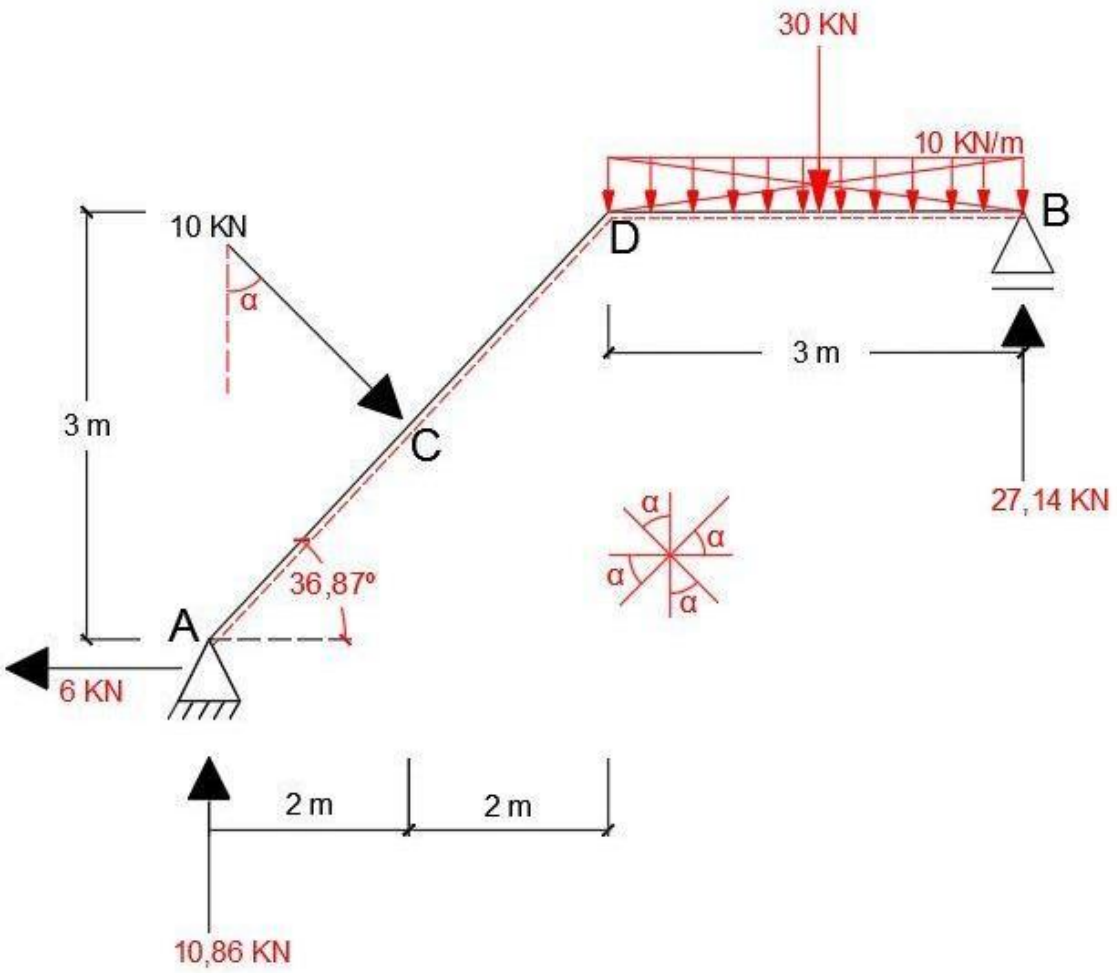
$\text{RyA} + \text{RyB} = 38\text{kN}$

$\sum \mathbf{FMa = 0}$

$-10(2{,}5) - 30(5{,}5) + \text{RyB}(7) = 0$

$\text{RyB} = 26{,}14\ \text{kN} \uparrow$

$\text{RyA} = 10{,}86\ \text{kN} \uparrow$

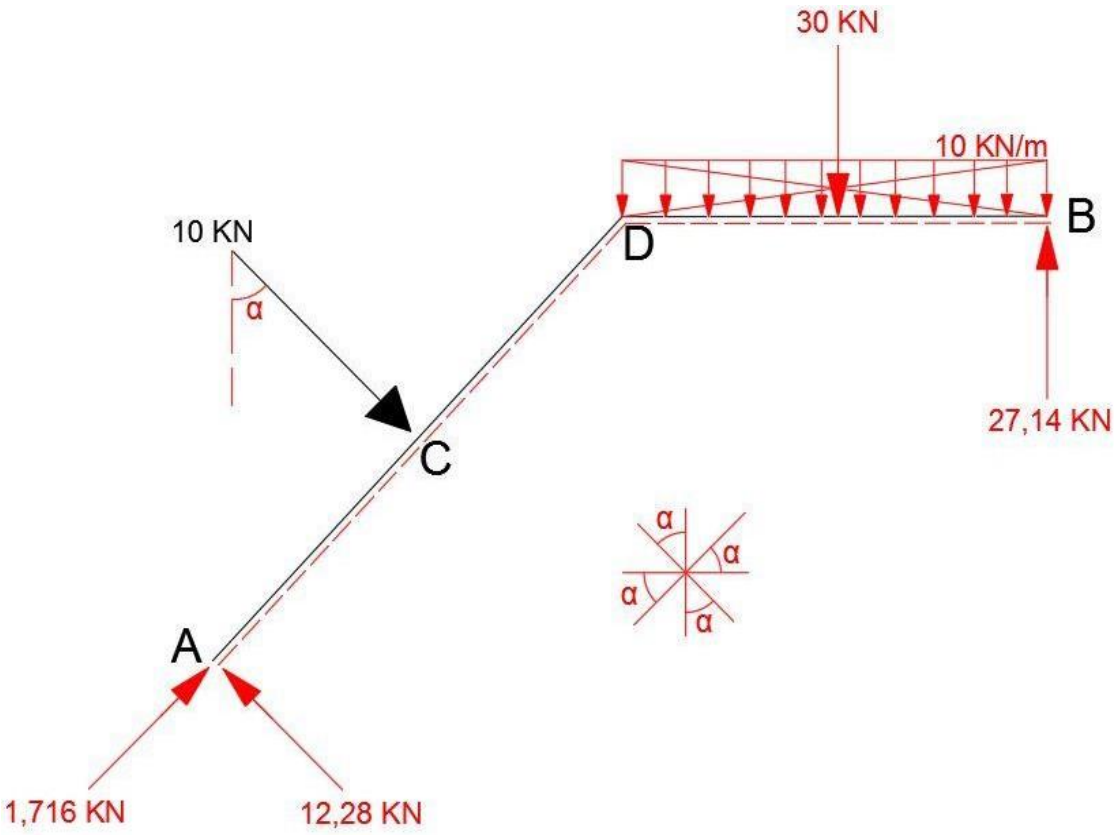


Com todas as reações de apoio encontradas, prosseguimos com o procedimento de decomposição das forças em eixos ortogonais na barra inclinada como foi feito na seção anterior.

Em A:

Y: $10{,}86(0{,}8) + 6(0{,}6) = 12{,}28$ kN ↑

X: $10{,}86(0{,}6) - 6(0{,}8) = 1{,}716$ kN→



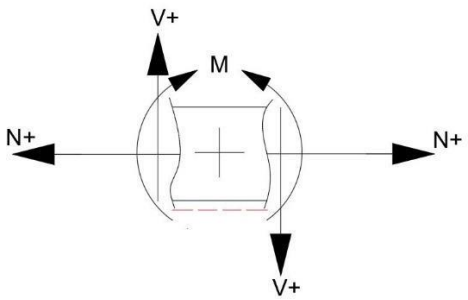
Com todas as cargas definidas, podemos realizar o traçado dos diagramas para cada uma das barras em análise. É importante notar que nos pórticos, as reações presentes em uma dada barra serão transmitidas para as outras, podendo ou não ser o mesmo tipo de esforço. Neste primeiro exemplo, a carga de 1,716 kN realiza um esforço normal de compressão na barra AD e é anulada pelos esforços cortantes que agem na barra DB, pois esses cortantes agem como esforços normais na barra AD e vice-versa.

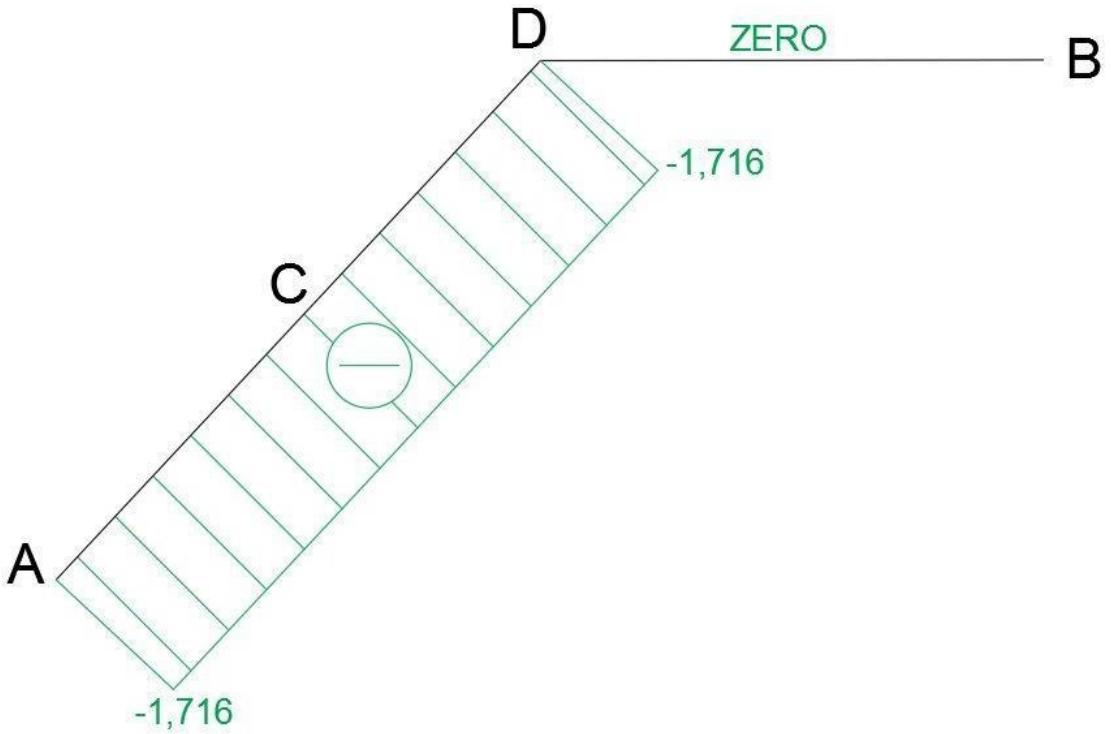
DEN (kN)

Pela esquerda

NA = -1,716 kN (Constante até D)

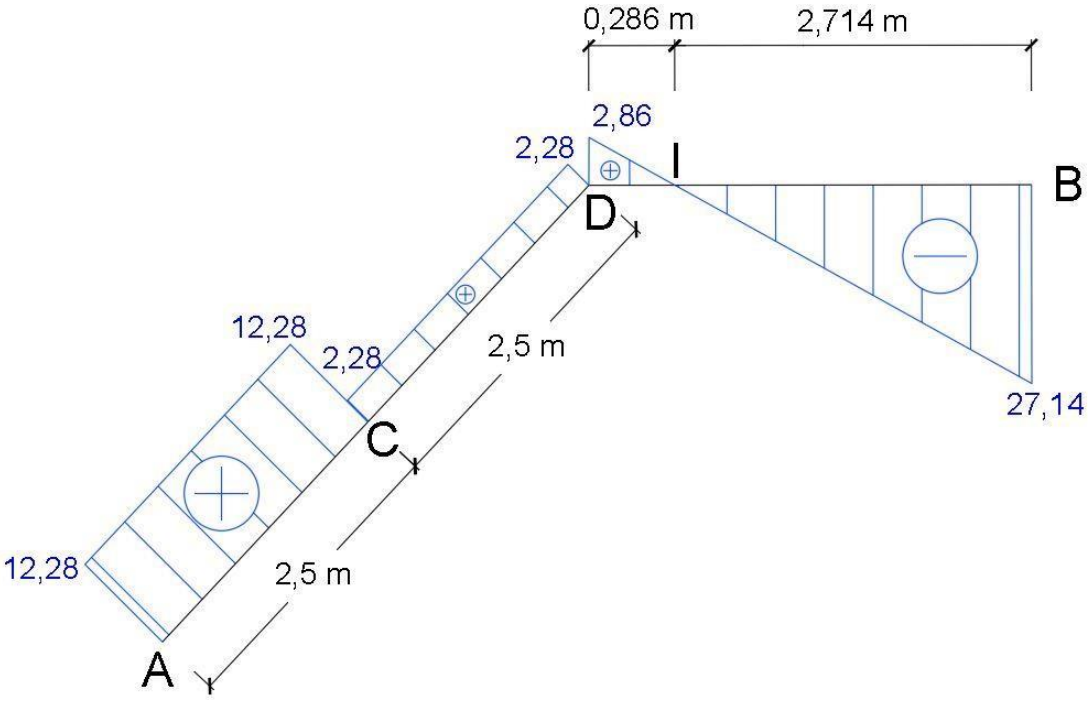
ND = NB = 0





DEC (kN)

Barra AD pela esquerda **VA =** 12,28 kN (Constante até C) **VCesq =** 12,28 kN **VCdir =** 12,28 – 10 = 2,28 kN (Constante até D)	Barra DB pela direita **VB =** -27,14 kN **VD =** -27,14 + 30 = 2,86 kN **Distância DI =** $\frac{2,86}{10}$ = 0,286m



DMF (kN.m)

Barra AD pela esquerda

$\mathbf{MA = 0}$

$\mathbf{MC =} 12{,}28(2{,}5) = 30{,}7\ \text{kN.m}\ (1°\ \text{grau})$

$\mathbf{MD =} 30{,}7 + 2{,}28(2{,}5) = 36{,}4\text{kN.m}\ (1°\ \text{grau})$

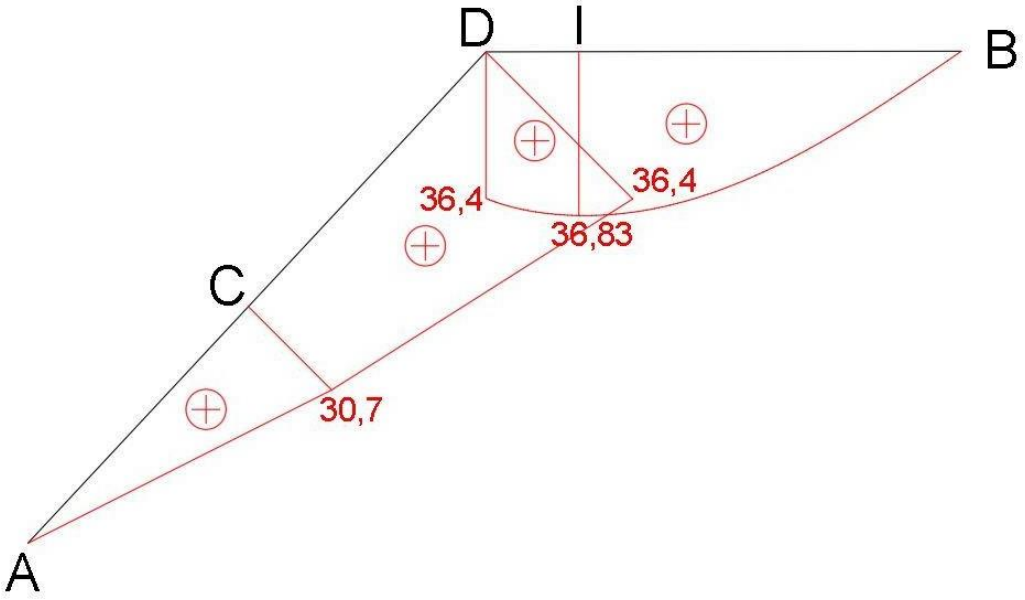
Barra DB pela direita

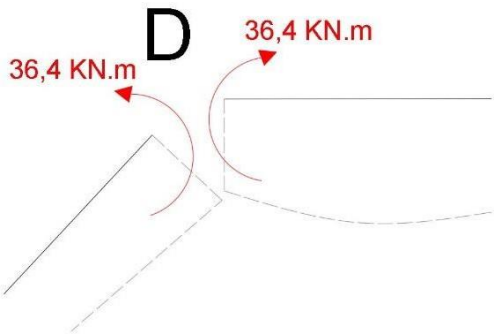
$\mathbf{MB =}\ 0$

$\mathbf{MI =} \frac{27{,}14(2{,}714)}{2} = 36{,}83\text{kN.m}(2°\ \text{grau})$

$\mathbf{MD =} 36{,}83 - \frac{2{,}86(0{,}286)}{2} = 36{,}4\text{kN.m}(\ 2°\ \text{grau})$

O momento fletor é sempre traçado ao lado tracionado. Se este coincidir com o lado travejado será considerado positivo, caso contrário, será considerado negativo.

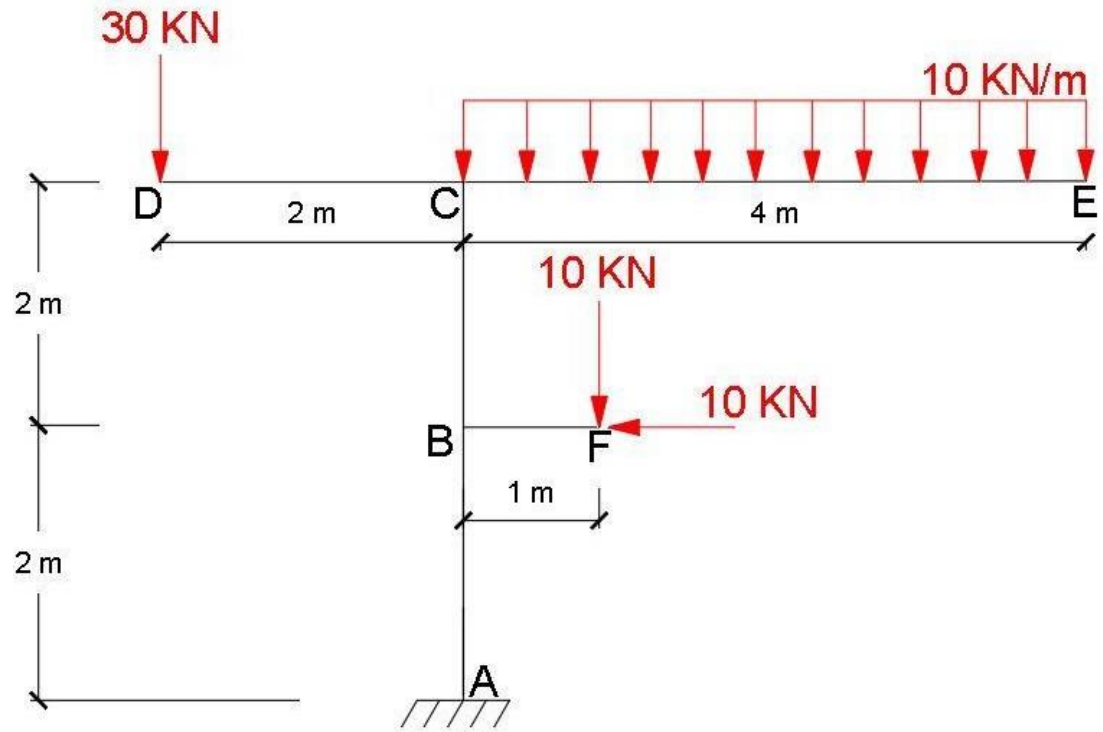




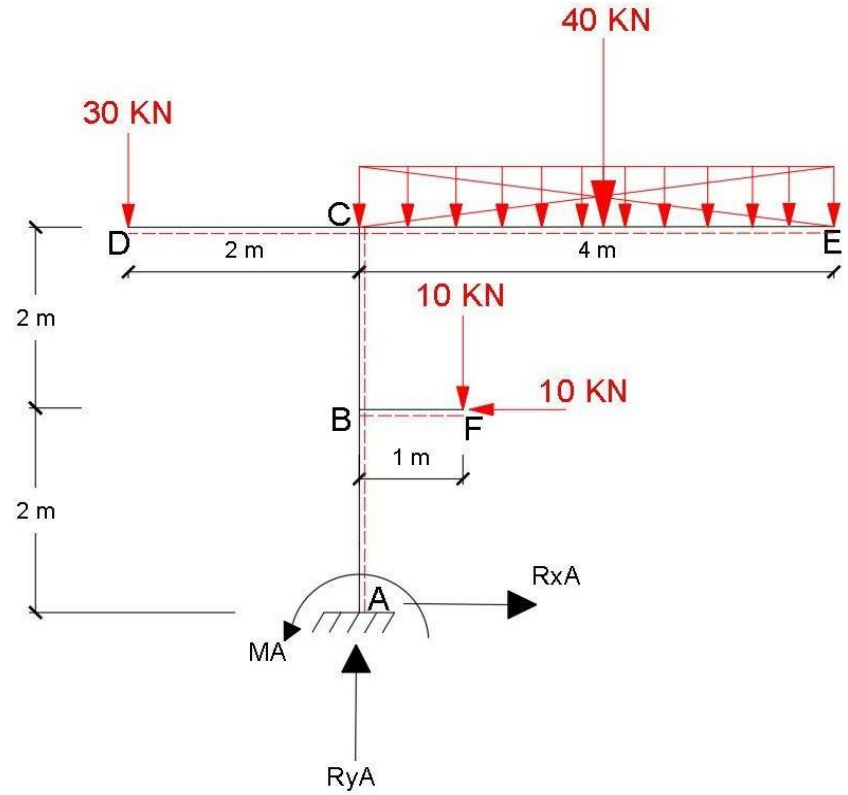
No nó D os momentos se anulam. Podemos provar realizando o somatório dos momentos naquele ponto. A análise de nós será demonstrada no exemplo 2.

MD = 36,4 (anti-horário) – 36.4(horário) = 0

Pórtico com balanço

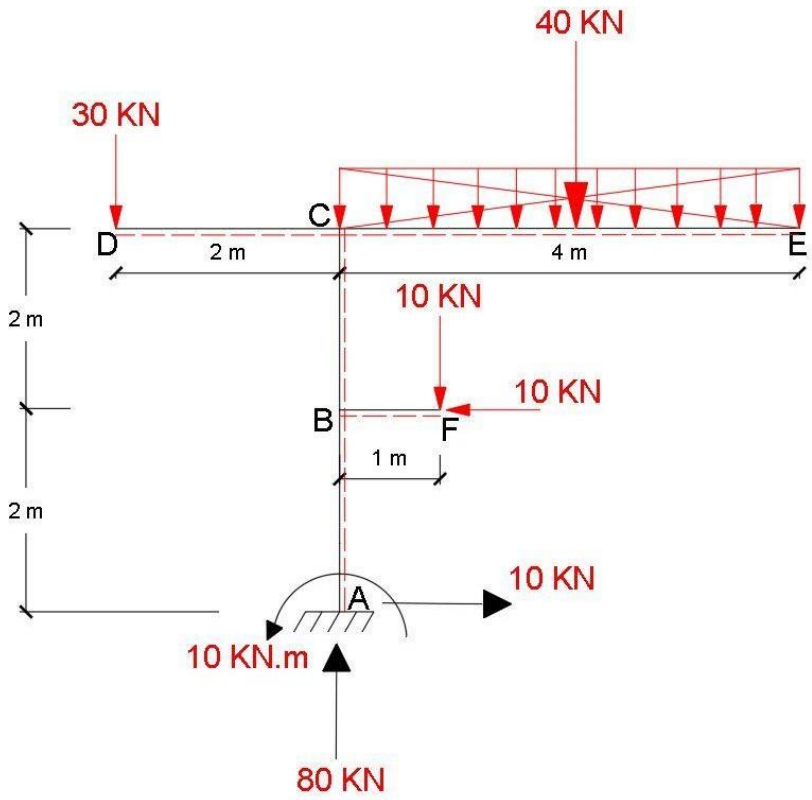


Assim como fizemos para o primeiro exemplo devemos encontrar as reações de apoio e, aleatoriamente, definir que no presente exercício o lado travejado será considerado o lado de baixo de cada haste em análise.



As linhas tracejadas em vermelho representam as fibras do lado de baixo em cada barra. Segue o cálculo das reações e o diagrama de corpo livre.

$\Sigma Fx = 0$	$\Sigma Fy = 0$	$\Sigma FMA = 0$
$RxA - 10 = 0$	$RyA - 10 - 30 - 40 = 0$	$MA + 10(2) - 10(1) - 40(2) + 30(2) = 0$
$RxA = 10\ kN \rightarrow$	$RyA = 80\ kN \uparrow$	$MA = 10 kN.m$



Lembre-se, o que define a orientação de convenção dos sinais das seções é o lado tracejado, como sendo o lado de baixo da haste em análise.

DEN (kN)

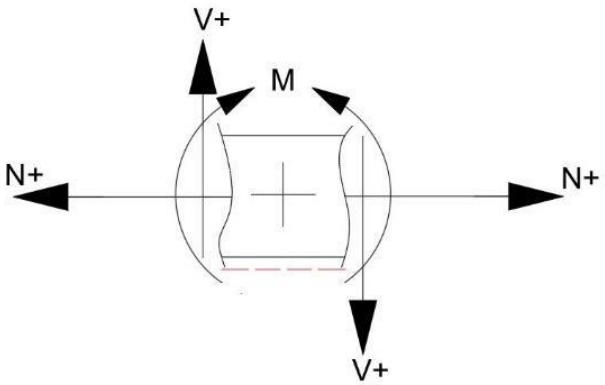


Figura 3 Convenção para barra horizontal

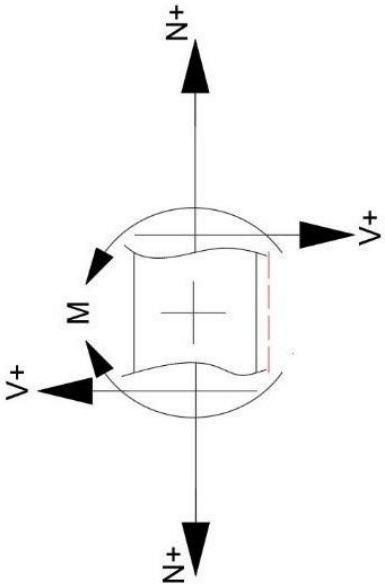


Figura 4 Convenção para barra vertical

Barra AC de baixo para cima
NA = -80 kN (Constante até B)

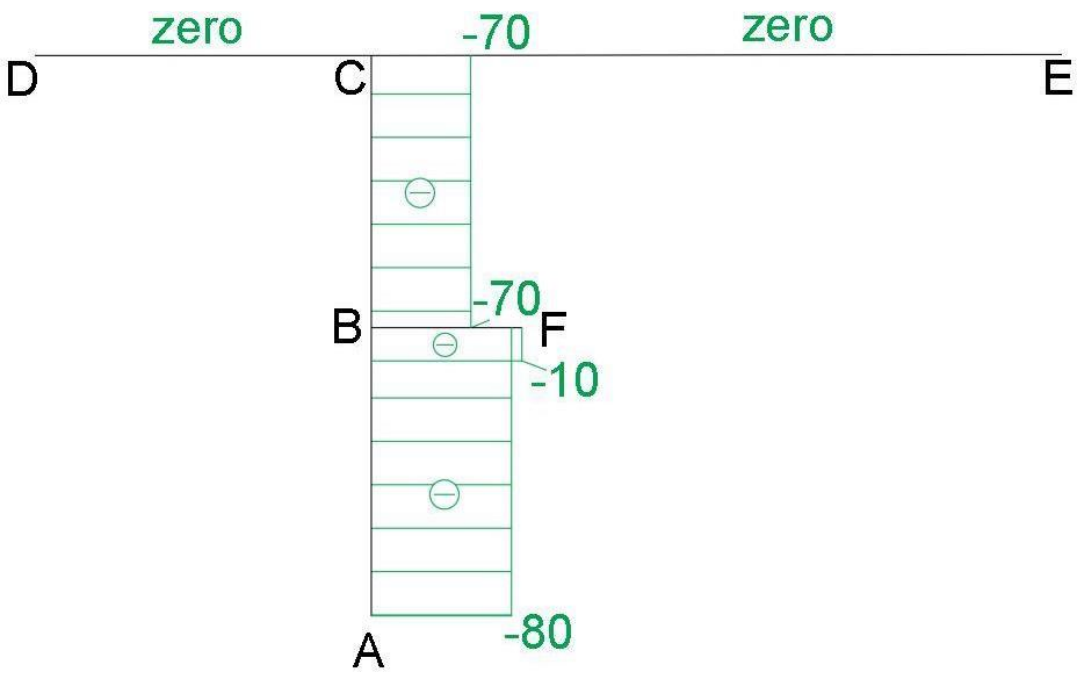
NB= -80 + 10 = -70Kn (Constante até C)

NF = -10kN (Constante até B)

NB= -10 + 10 = 0

Na barra DE não ocorre esforço normal

No ponto B, o esforço cortante de -1kN se torna um esforço normal positivo, que se anula com o esforço normal em F.



DEC (kN)

Barra AC acima
VA = -10 kN (Constante até B)

VB = -10 + 10 = 0

Barra BF pela direita
VF = 10kN (Constante até B)

Barra DE pela esquerda

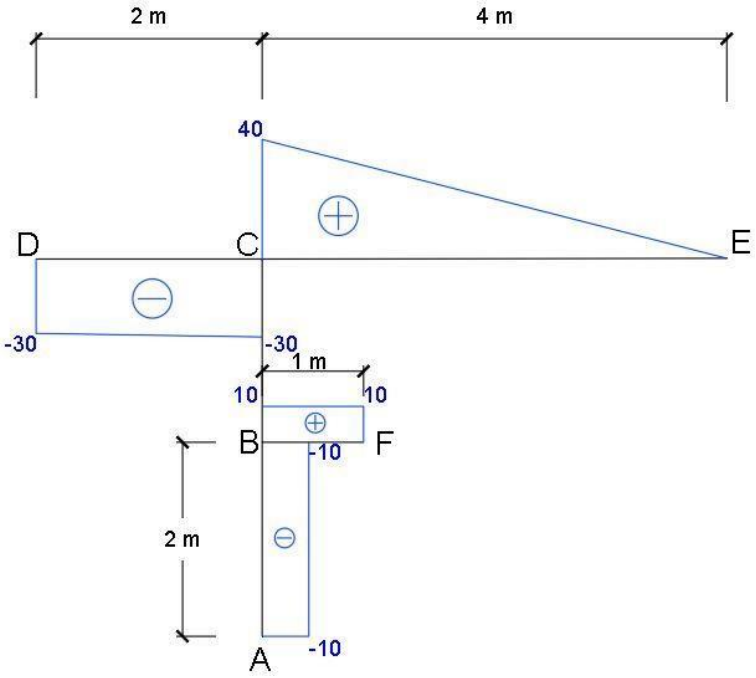
VD = -30kN (Constante até C)

VCesq = -30kN

VCdir = -30 + 70 = 40kN

VE = 40 - 40 = 0

No ponto C, o esforço normal de -70kN (-80kN ↑ + 10kN↓) vira um esforço cortante positivo, e a resultante do cortante em C à direita é 40kN. No ponto B ocorre o mesmo, o esforço normal se torna um esforço cortante.



DMF (kN.m)

Barra AC acima

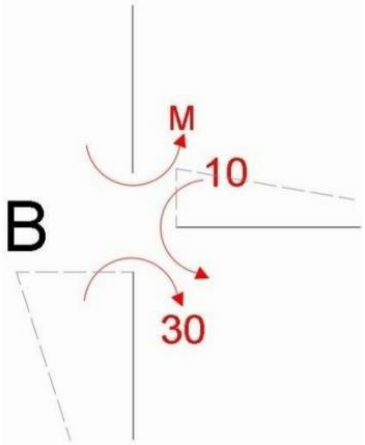
MA = -10kN.m (Reação de apoio)

MBabaixo = -10 -10(2) = -30kN.m (1° grau)

Barra BF pela direita

MF = 0

MBdir = -10(1) = -10 kN.m



Encontramos os momentos no ponto B abaixo na barra AD e à direita na barra BF, naturalmente. Agora, para encontrarmos o momento acima, precisamos analisar o nó B. Uma maneira de encontrar esse momento é analisar o lado de cada barra que está sendo tracionada. Abaixo, descobrimos que ocorre um momento negativo de -30kN, portanto sabemos que as fibras são tracionadas

no sentido horário naquela região. Já à direita encontramos o valor de -10 kN.m, onde as fibras são tracionadas, portanto, no sentido anti-horário nesta região. Após feita essa análise, podemos encontrar o momento acima realizando o somatório dos momentos no ponto para que haja equilíbrio no nó em questão, ou seja, ΣM nó = 0.

$\Sigma FM = 0$

$M + 10 - 30 = 0$

$M = 20kN$ (Constante até C)

Barra DC pela esquerda

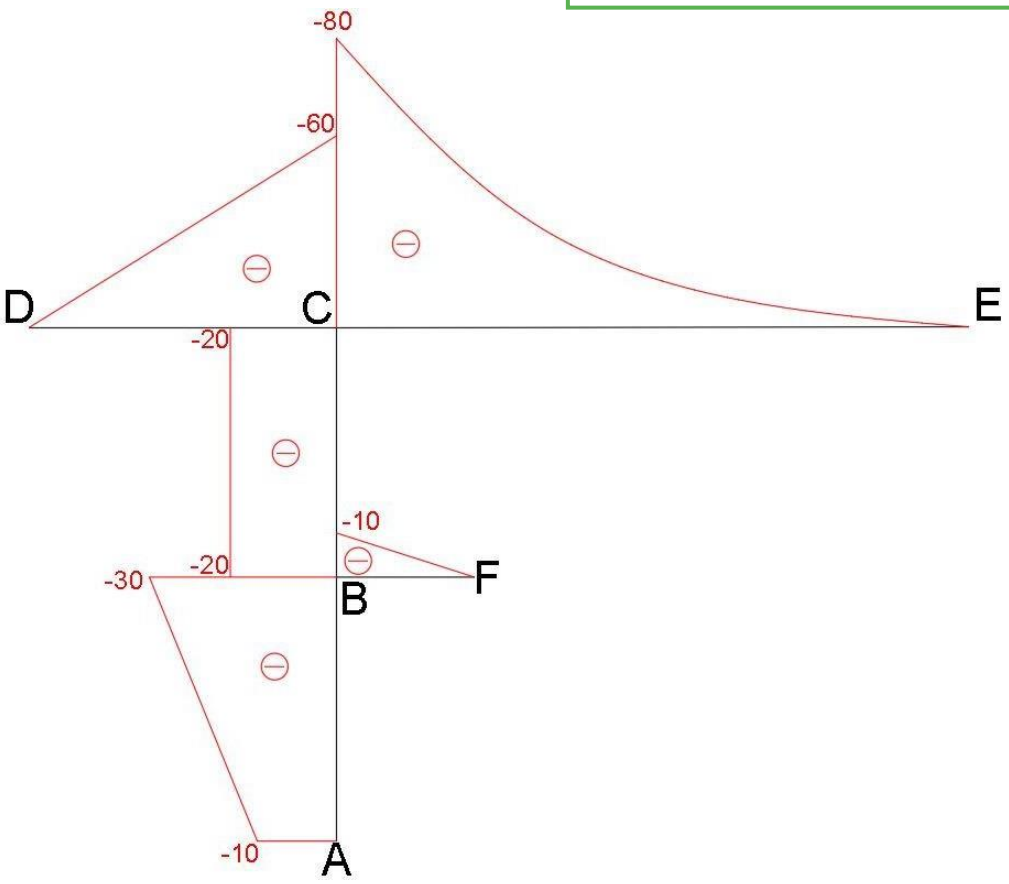
$MD = 0$

$MCesq = -30(2) = -60kN.m$ (1° grau)

Barra CE pela direita

$ME = 0$

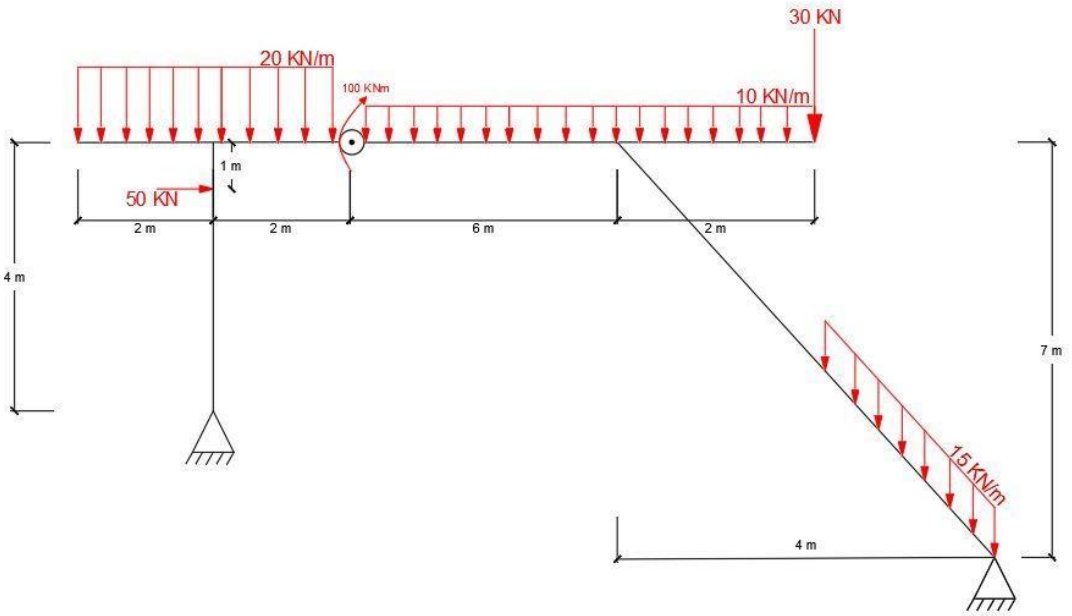
$MCdir = -\frac{40(4)}{2} = -80kN.m$ (2° grau)



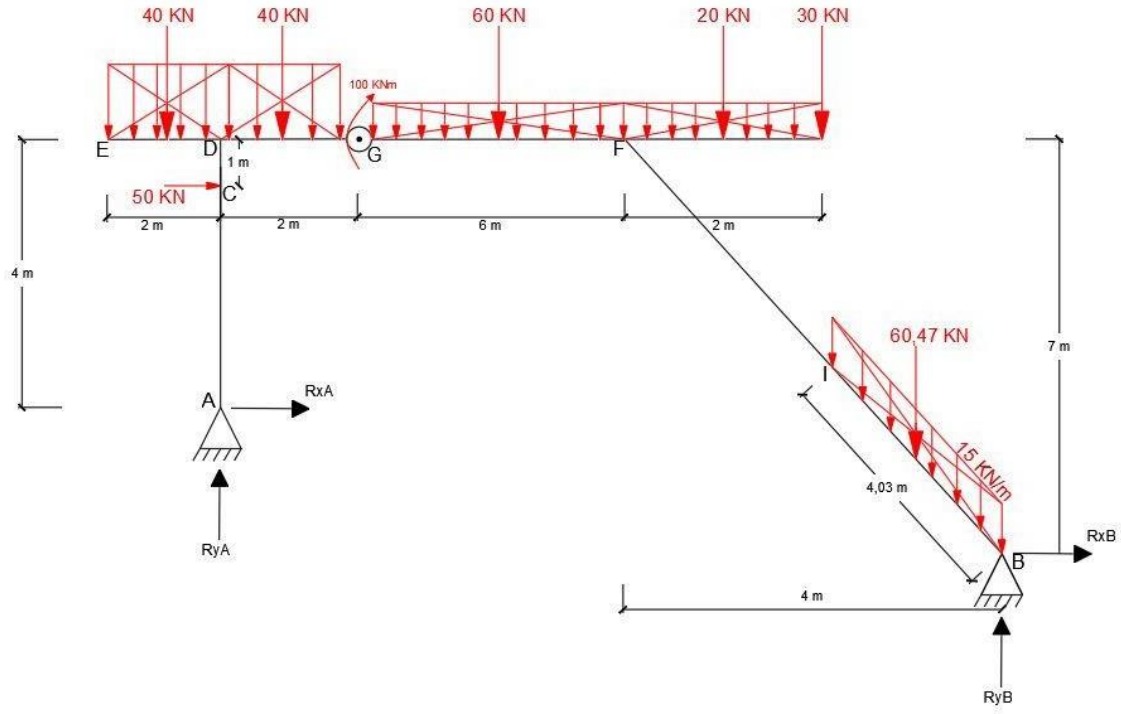
Obs: No exemplo acima, todos os diagramas de momentos fletores foram traçados do lado tracionado, que no caso ficaram do lado oposto ao tracejado inicialmente adotado.

Pórtico Triarticulado

1° Exemplo



O pórtico triarticulado é uma estrutura isostática que possui uma rótula interna e pode conter barras em balanço e barras inclinadas. Será a estrutura de maior interesse neste capítulo.



Como a estrutura é 1x hiperestática externamente e com uma rótula interna conectando duas hastes, fazendo com que a estrutura tenha gh = 0. Desta forma a rótula interna fornece uma equação interna de equilíbrio adicional, concluindo a um sistema de 4 equações. A saber:

$$\sum \text{Fx} = 0; \sum \text{Fy} = 0; \sum \text{Mesqrótula} = 0 \text{ ou } \sum \text{Mdirrótula} = 0$$

ΣFx = 0

$\text{RxA} + \text{RxB} + 50 = 0$

$\text{RxA} + \text{RxB} = -50$

ΣFy = 0

$\text{RyA} + \text{RyB} - 40 - 40 - 60 - 20 - 30 - 60{,}47 = 0$

$\text{RyA} + \text{RyB} = 250{,}47 \text{ kN}$

ΣFMB = 0

$60{,}47(1) + 30(2) + 20(3) + 60(7) - 100 + 40(11) + 40(13) - 50(6) - \text{RxA}(3) - \text{Ry}(12) = 0$

$12\text{RyA} - 4\text{RxA} = 110$

ΣFMGesq = 0

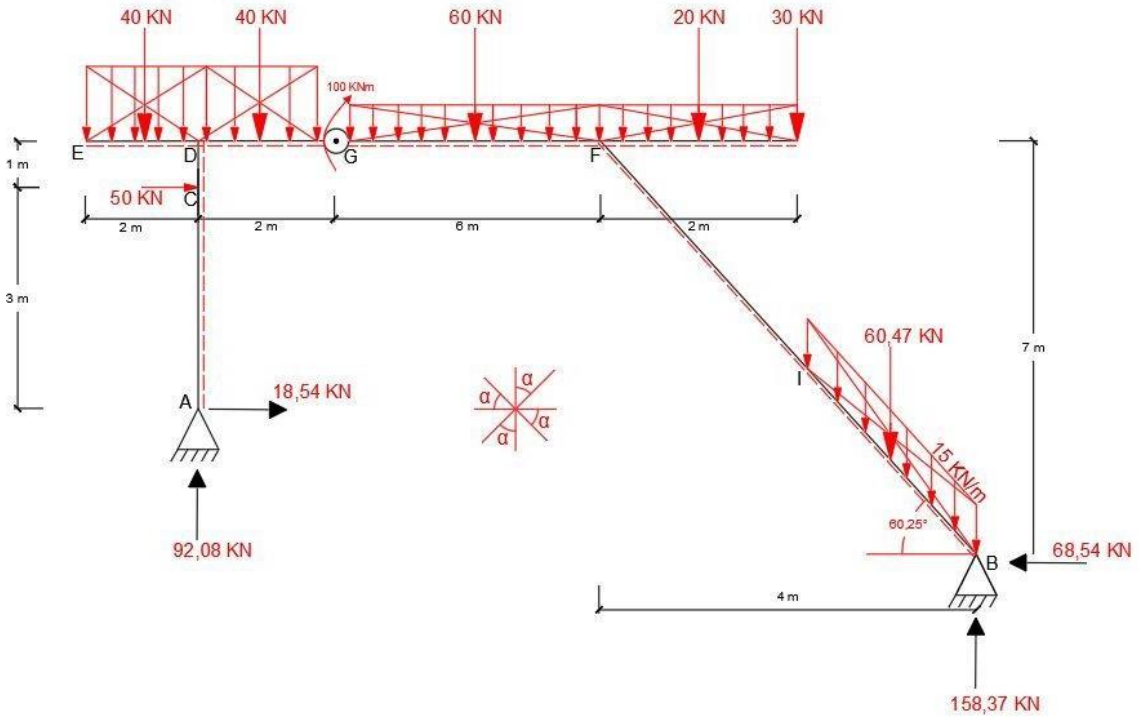
$-100 + 40(1) + 40(3) + 50(1) - \text{Ry}(2) + \text{RxA}(4) = 0$

$2\text{RyA} - 4\text{RxA} = 110$

Somando as equações

$\text{RxA} = 18{,}54\text{kN} \rightarrow \text{RyA} = 92{,}08\text{kN}\uparrow \text{ RyB}=158{,}37\text{kN}\uparrow \text{ RxB} = -68{,}54\text{kN} \leftarrow$

Segue o diagrama de corpo livre com o traçado das fibras:



Faremos agora, o traçado dos diagramas, lembrando que é necessário decompor as forças na barra inclinada.

DEN (kN)

Barra AD acima

NA = -92,08kN (Constante até D)

Barra EH pela esquerda

NED = 0 9 (não há esforços normais)

NDF = -50 - 18,54 = -68,54kN

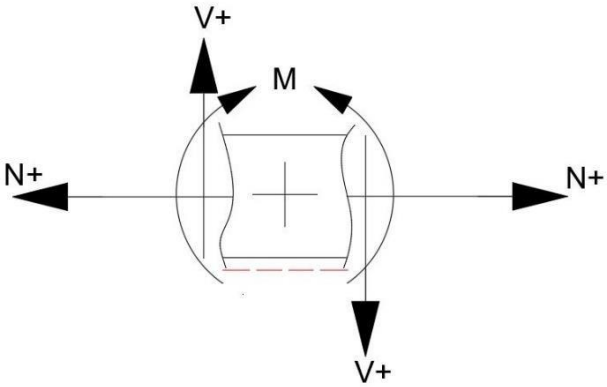
NGH = -68,54 + 68,54 = 0

Barra GB acima

NB = -158,37(0,868) – 68,54(0,496) = -171,46kN

NI = -171,46 + 60,45(0,868) = -118,98kN

NIG = -118,98kN

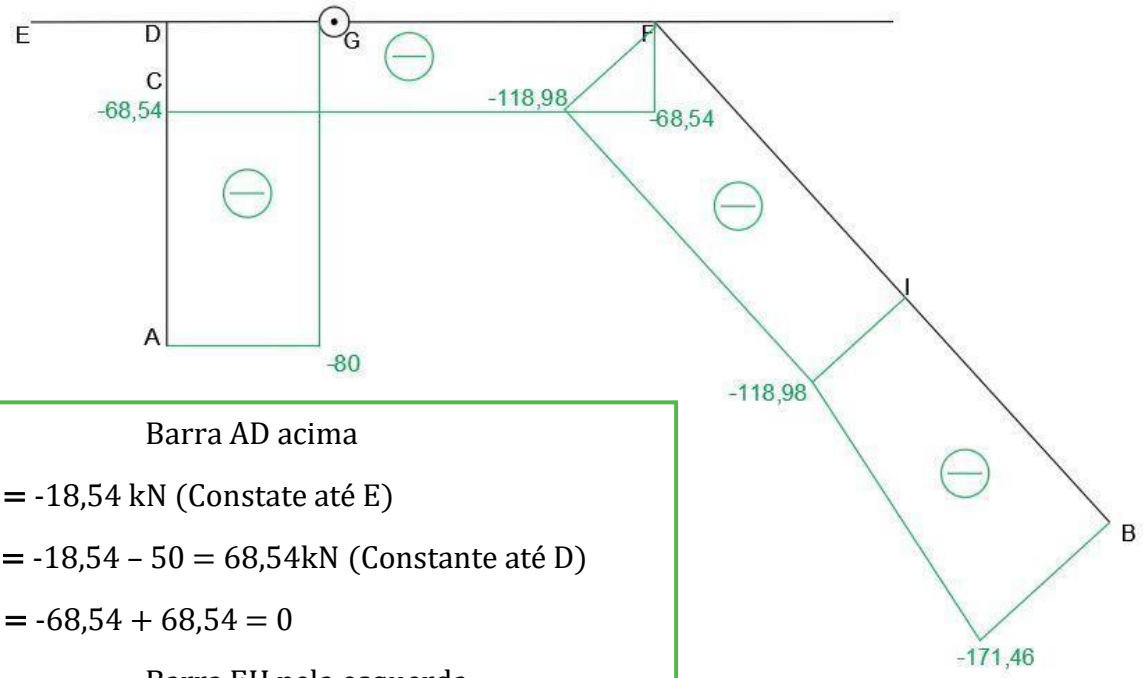


$\alpha = \arctan \frac{7}{4} = 60{,}25°$

$\sin \alpha = 0{,}868$

$\cos \alpha = 0{,}496$

Note que os esforços ortogonais na barra AD (18,54kN e 50kN) agem como esforços normais na barra DG assim como o esforço de 68,54kN da barra BG.



Barra AD acima

VA = -18,54 kN (Constate até E)

VE = -18,54 – 50 = 68,54kN (Constante até D)

VD = -68,54 + 68,54 = 0

Barra EH pela esquerda

VE = 0

VDesq = -40kN (linear)

VDdir = -40 + 92,08 = 52,08 kN

VG = 52,08 – 40 = 12,08 kN (linear)

VFesq = 12,08 – 60 = -47,92kN (linear)

VFdir = -47,92 – 60,45 + 158,37 = 50 kN

VHesq = 50 – 20 = 30kN (linear)

VHdir = 30 – 30 = 0kN

Barra GB acima

VB = -158,37(0,496) + 68,54(0,868) = -19,059kN

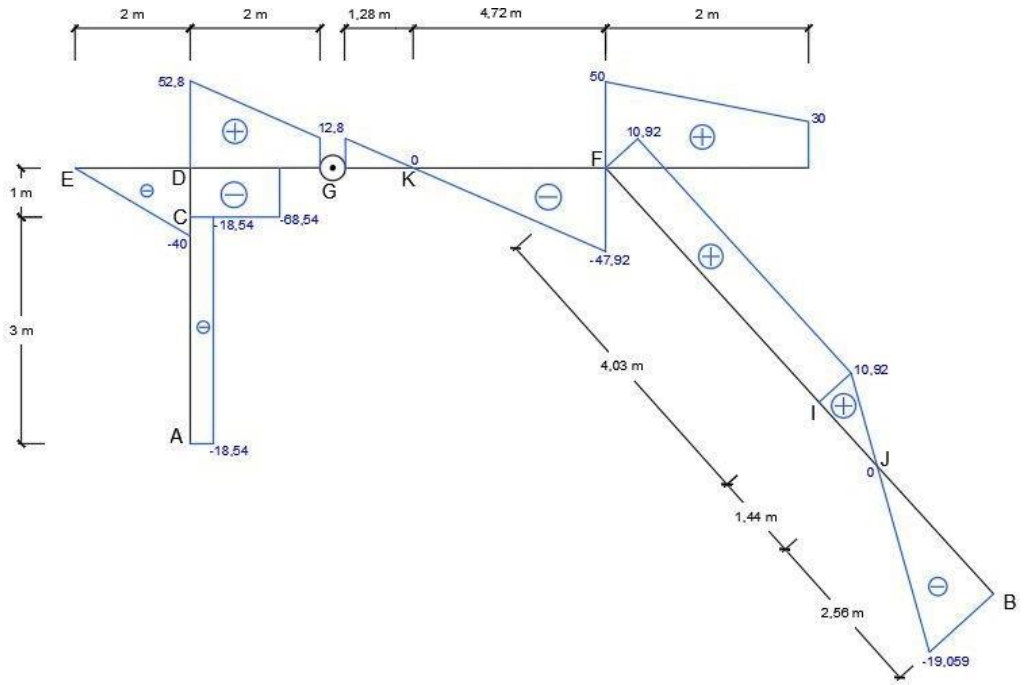
VI = -19,059 + 60,45(0,496) = 10,92kN (linear)

VF = 10,92kN

Distância GK $= \frac{12,8}{10} = 1,28$m

Distância IJ $= \frac{19,06}{15(0,496)} = 2,56$m

Note que a reação de apoio RyA = 92,08kN age como esforço cortante no ponto D. O mesmo ocorre para os esforços verticais da barra BG no ponto G (158,37kN e 60,45kN)



DMF (Kn.m)

Barra AD acima

MA = 0

MC = -18,54(3) = -55,62kN.m

MDabaixo = -55,62-68,54(1) = -124,16kN.m

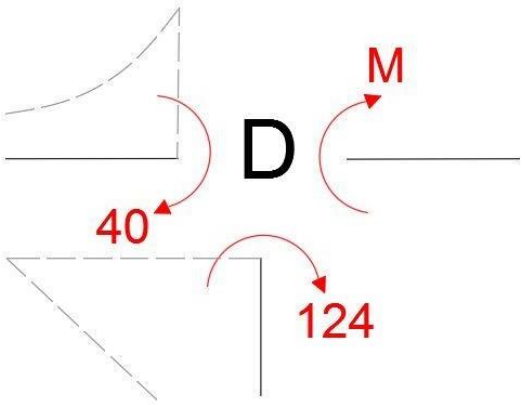
Barra EG pela esquerda

ME = 0

MDesq = $\frac{-40(2)}{2}$ = -40kN.m (2°Grau)

MGesq = -100kN.m (traciona as fibras de cima)

MDdir = -40 – 124 = -164kN.m(2°Grau)



Ao analisarmos o nó D, temos dois momentos negativos no sentido horário, portanto, a resultante M que anula esses momentos deve ter sentido anti-horário e valor igual a MDdir = -40 – 124 = 164kN.m

Barra BF acima

MB = 0

MJ = $\frac{19,059(2,56)}{2}$ = 24,4kN.m(2° Grau)

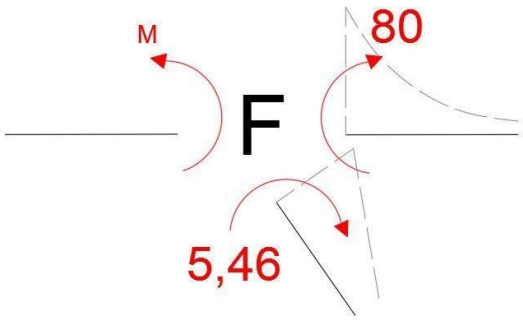
MI = 24,4 - $\frac{10,92(1,44)}{2}$=16,54kN.m(2°Grau)

MFabaixo = 16,54 - $\frac{10,92(4,03)}{2}$ = -5,46kN.m (linear)

Barra GH pela direita

MFdir = - $\frac{(50+30)2}{2}$ = -80kN.m(2° Grau)

MFesq = -80 – 5,46 = -85,46kN.m(2°Grau)



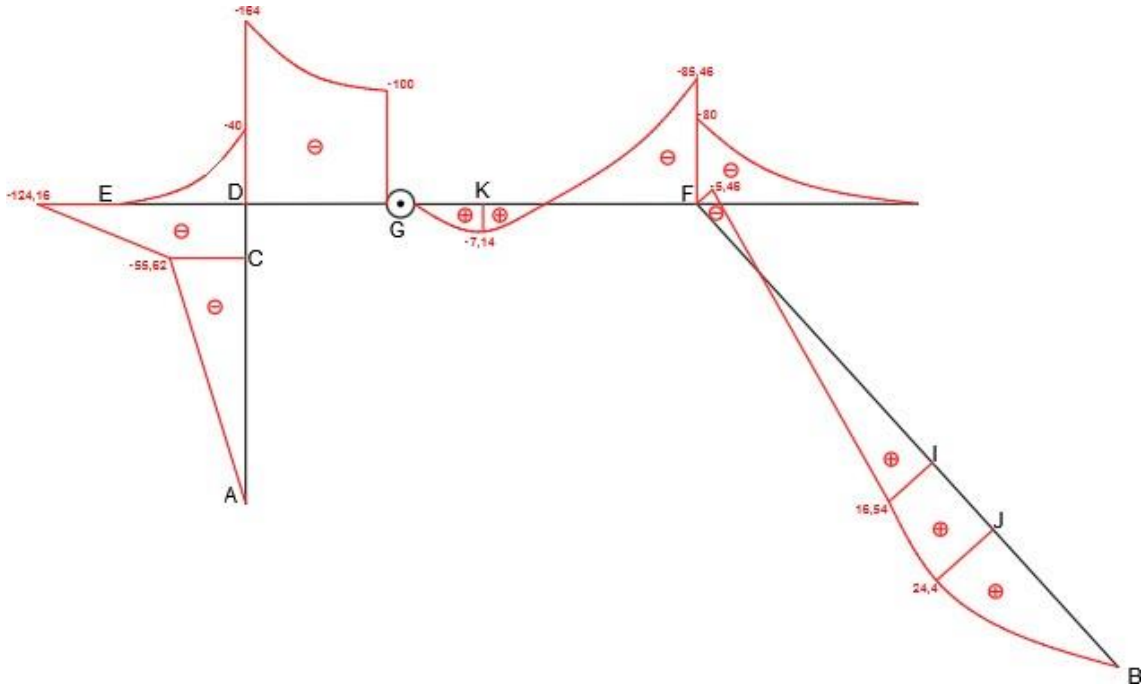
No nó F, temos dois momentos aplicados no sentido horário, portanto:

MFesq = -80-5,46 = -85,46kN.m

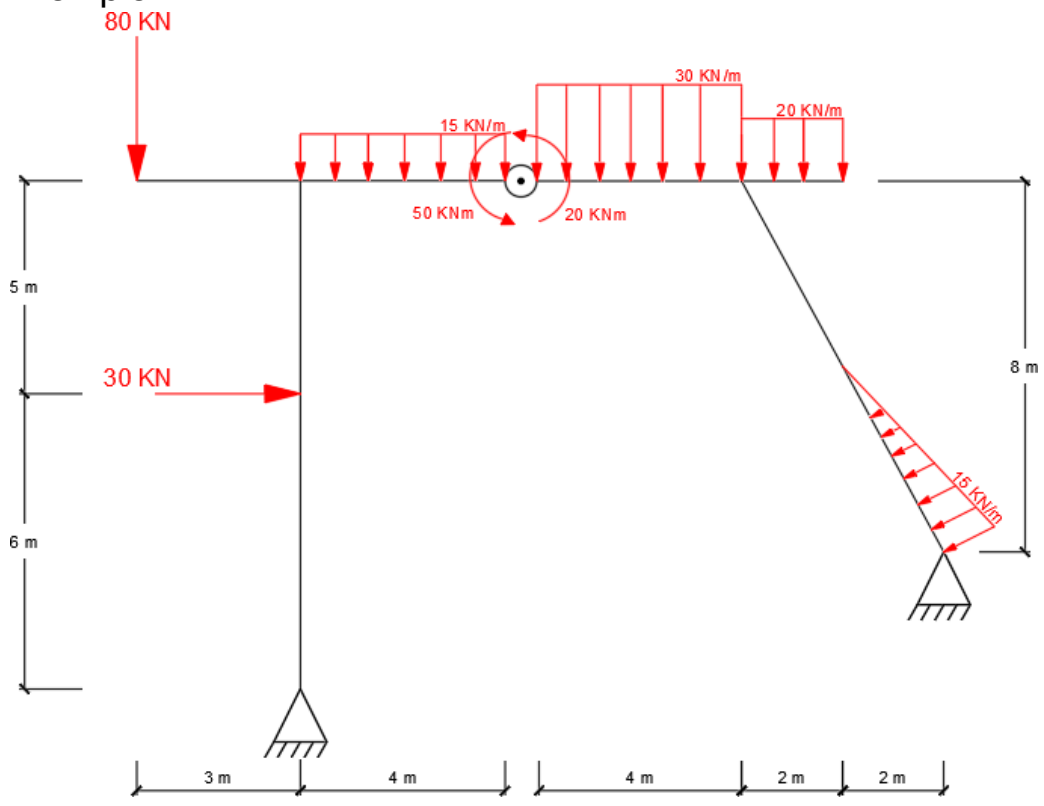
Uma maneira de encontrar o momento em K é realizar o somatório dos momentos a esquerda ou á direita neste ponto, segue o cálculo:

$$\Sigma FMKdir = 0$$

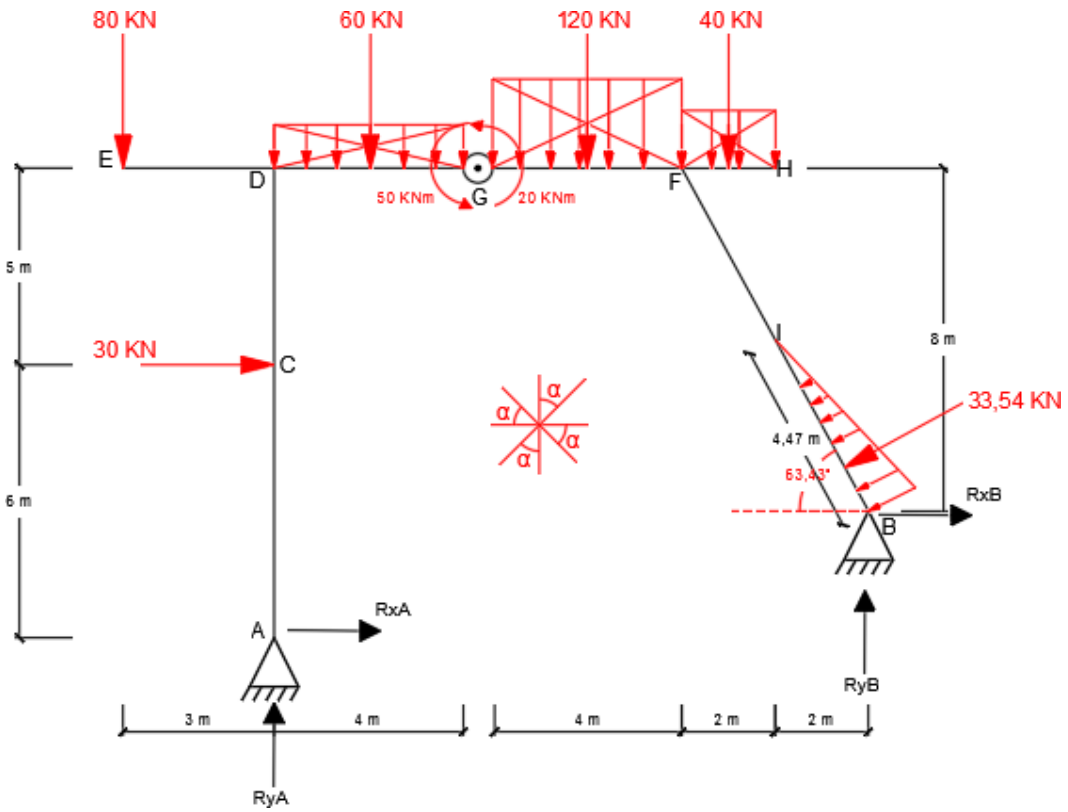
$$158{,}37(4{,}72+4) - 68{,}54(7) - 60{,}45(7{,}72) - 30(6{,}72) - 20(5{,}72) - 10(4{,}72)\frac{4{,}72}{2} = \mathbf{MK} = 7{,}14\text{kN.m (2°Grau)}$$



2° Exemplo



Primeiramente devemos encontrar as reações no apoio:



$$\sum \mathbf{Fx} = \mathbf{0}$$

$$RxA + RxB + 30 - 33{,}54(0{,}894) = 0$$

$$RxA + RxB = 0{,}015\text{kN}$$

$$\sum \mathbf{Fy} = \mathbf{0}$$

$$RyA + RyB - 80 - 60 - 120 - 40 - 33{,}54(0{,}447) = 0$$

$$RyA + RyB = 314{,}99\text{kN}$$

$$\boldsymbol{\Sigma FMB = 0}$$

$$33{,}54\left(\frac{4{,}47}{3}\right) + 40(3) + 120(6) + 20 + 50 + 60(10) + 80(15) - 30(3) + \mathrm{R_x}\mathrm{A} - 12\mathrm{R_y}\mathrm{A} = 0$$

$$3\mathrm{R_x}\mathrm{A} - 12\mathrm{R_y}\mathrm{A} = -2669{,}97$$

$$\sum \mathbf{FMGesq} = \mathbf{0}$$

$$50 + 60(2) + 80(7) + 30(5) - RyA(4) + RxA(11) = 0$$

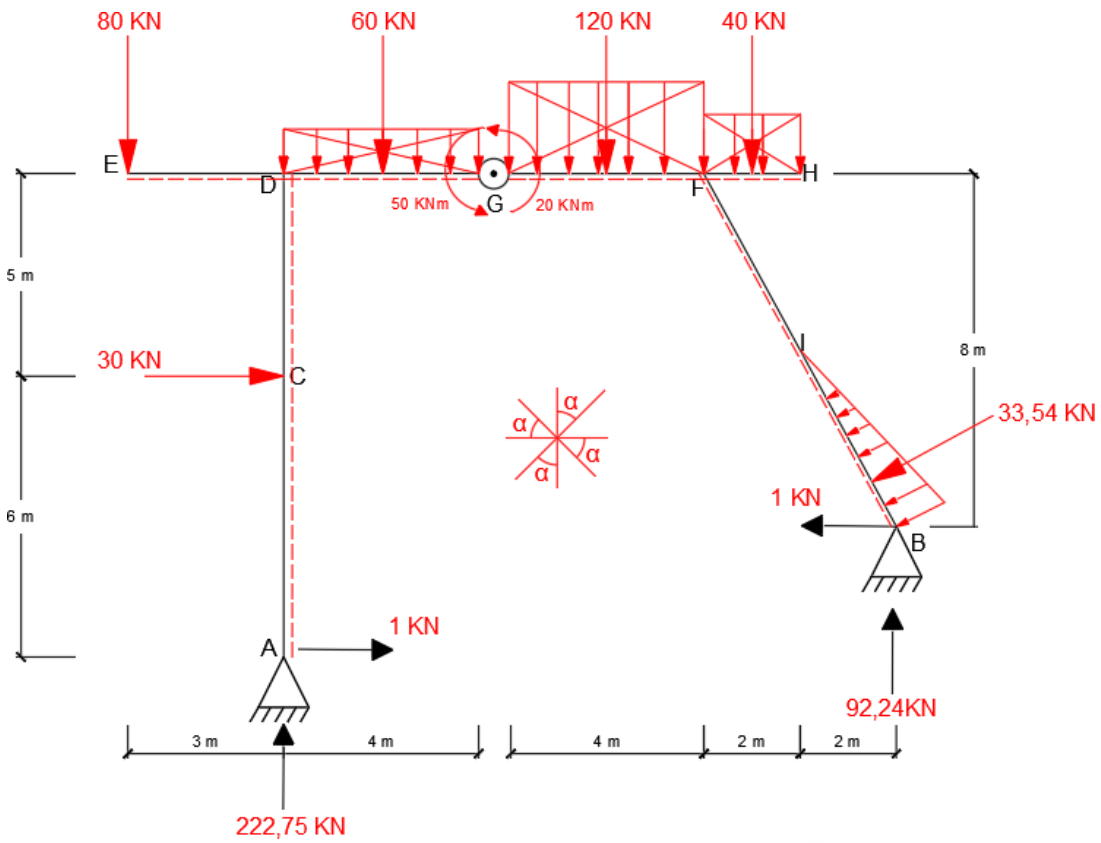
$$11RxA - 4RyA = -880\text{kN}$$

Somando as equações

$$\mathrm{RxA} = 1\text{kN} \rightarrow \quad \mathrm{RyA} = 222{,}75\text{kN}\uparrow \quad \mathrm{RyB} = 92{,}24\text{kN}\uparrow \quad \mathrm{RxB} = \text{-}1\text{kN}\leftarrow$$

.

Segue o diagrama de corpo livre abaixo com o traçado das fibras:



DEN (kN)

Barra AD acima

NAD = -222,75kN

Barra EH pela esquerda

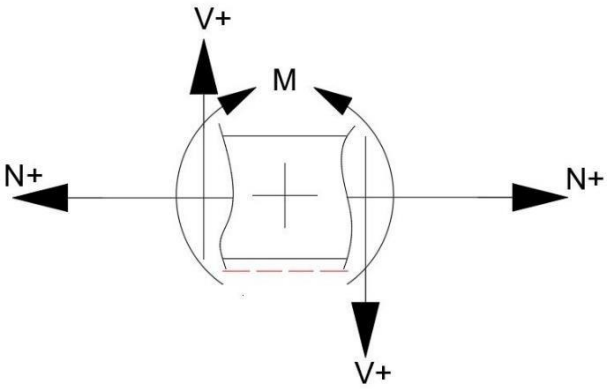
NED = 0 (não há esforços normais)

NDF = -30-1 **=** -31kN

NFH = $-31 + 33{,}54(0{,}894) + 1 = 0$

Barra BF acima

NBF = $-92{,}24(0{,}894) - 1(0{,}447) = -82{,}9$kN

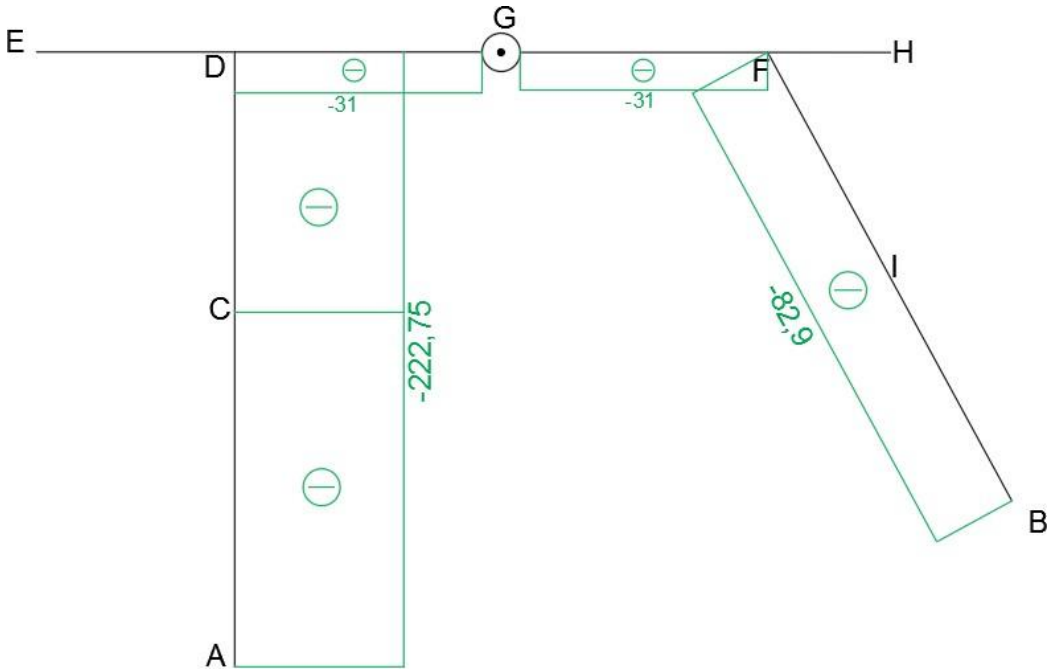


$$\alpha = arctan\frac{8}{4} = 63{,}43^0$$

$\text{Sin}\ \alpha = 0{,}894$

$\text{Cos}\ \alpha = 0{,}447$

Note que os esforços horizontais de 30kN e 1kN na barra AD geram esforços normais na barra EH. O mesmo ocorre para as cargas de 33,54 e -1kN na barra BF.



DEC(kN)

Barra AD acima

VA = -1kN (Constante até C)

VC = -1 – 30 = -31kN (Constante até D)

Barra EH pela esquerda

VE = -80kN (constante até D)

VDesq = -80kN

VDdir = -80 + 222,75 = 142,75kN

VG = 142,75 – 60 = 82,75kN (linear)

VFesq = 82,75 – 120 = 37,25kN

VFdir = -37,5 + 92,24 – 33,54(0,447) = 40kN(linear)

VH = 40 – 40 = 0 kN

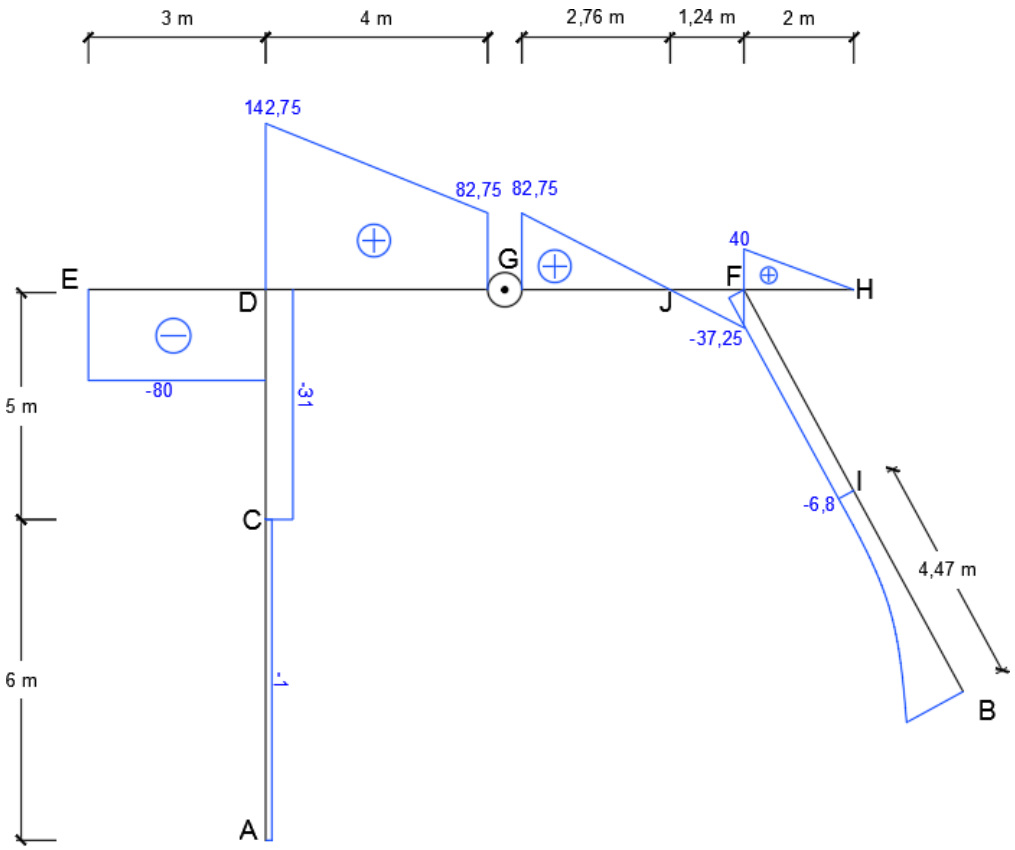
Barra BF acima

VB = -92,24(0,447) + 1(0,894) = -40,3kN

VI = -40,3 + 33,54 = -6,8kN (2° grau)

Note que a carga vertical de 222,75kN na barra AD age como esforço cortante na barra EH. O mesmo ocorre para as cargas de 92,24kN e 33,54(0,447)kN da barra BF que agem no nó F.

Distância GJ $= \frac{82,75}{30} = 2,76$m



DMF (kN.m)

Barra AD acima

MA = 0

MC = -1(6) = -6kN.m (linear)

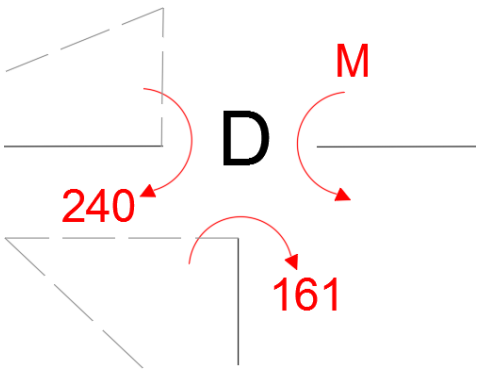
MDabaixo = -6 -31(5) = -161kN.m (linear)

Barra EH pela esquerda

ME = 0

MDesq = -80(3) = -240kN.m (linear)

MDdir = -401kN.m (traciona as fibras de cima)



Ao analisarmos o nó D, temos dois momentos no sentido horário, portanto a resultante M que anula esses momentos deve ter sentido anti-horário e valor igual a MDdir = -240 – 161 = -401kN.m.

$MGesq = 50kN.m$

$MGdir = -20kN.m$

$MJesq = -20 + \frac{82,75(2,76)}{2} = 94,195kN.m$ (2° Grau)

$MFesq = 94,195 - \frac{37,25(1,24)}{2} = 71,03kN.m$ (2° Grau)

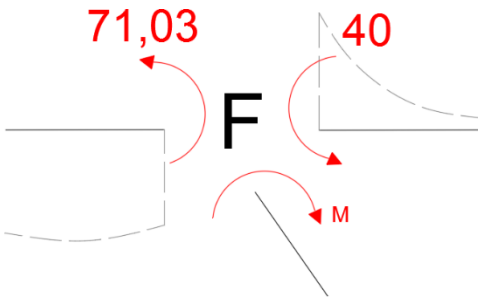
Barra HF pela direita

$\mathbf{MFdir} = -\frac{40(2)}{2} = -40kN.m$

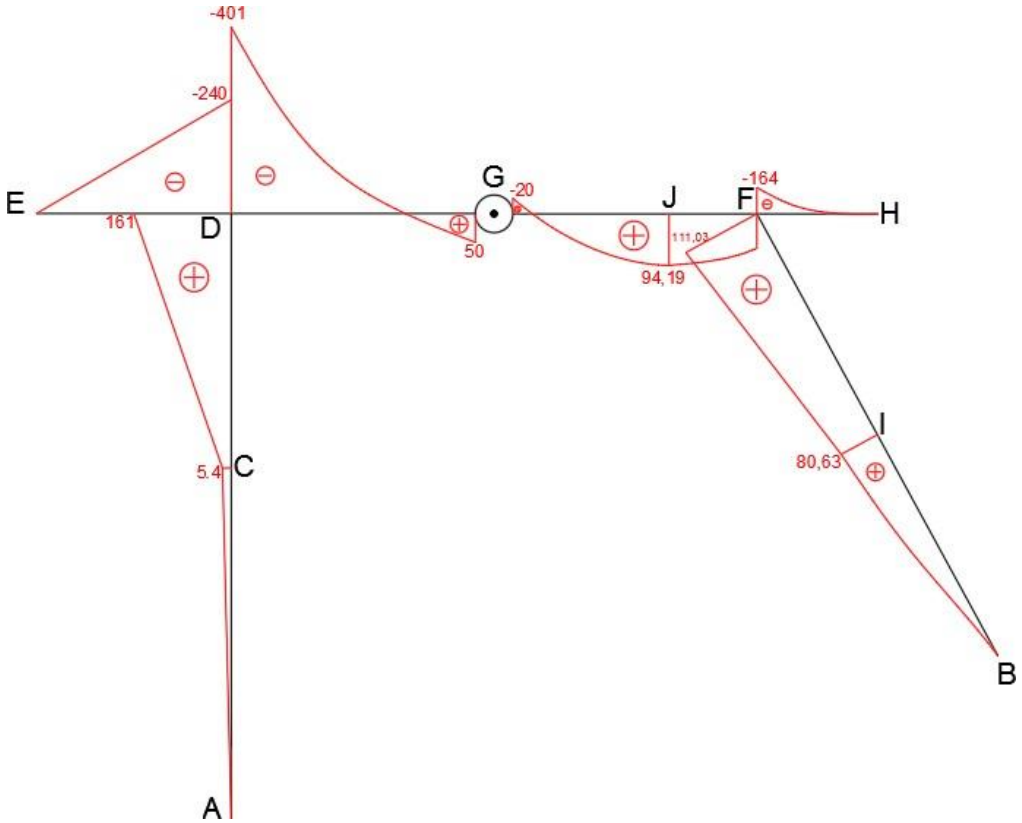
$\mathbf{MFabaixo} = 71,03 + 40 = 111,03kN.m$

$\mathbf{MI} = 111,03 - 6,8(4,47) = 80,63kN.m$ (3° Grau)

$\mathbf{MB} = 0$



Ao analisarmos o nó F, temos dois momentos no sentido anti-horário, portanto a resultante M que anula esses momentos deve ter sentido horário e valor igual MFabaixo = 71,03+40 = 111,03kN.m. Cada um deles tracionado as fibras de maneira apresentada acima, em cada haste.


-401
-240
E
D
161
G
-20
50
J
111,03
94,19
F
-164
H
I
80,63
5.4
C
B
A

9. Cabos

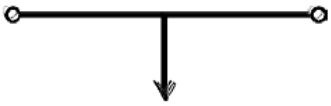
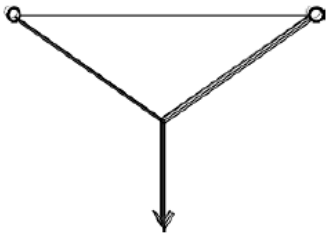
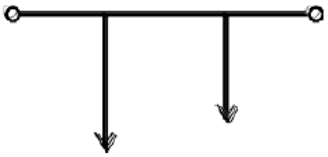
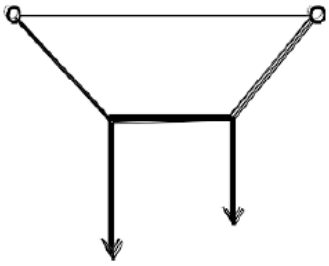
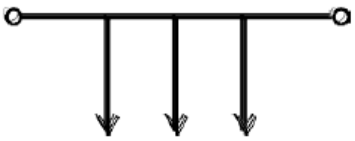
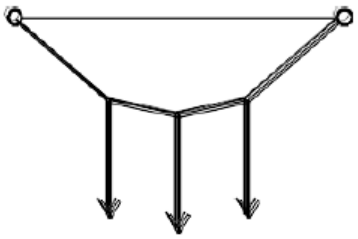
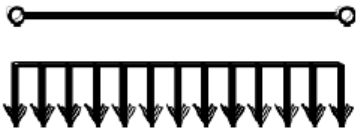
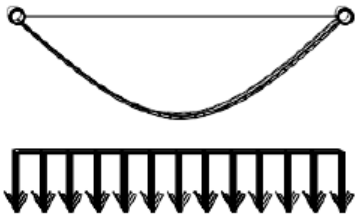
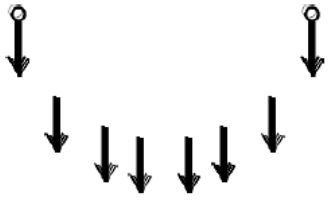
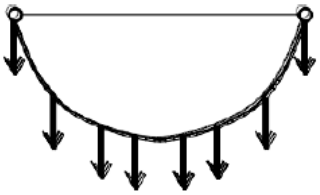
Cabos são estruturas lineares, extremamente flexíveis, capazes de resistir a esforços de tração. Os esforços cortantes, de compressão, de flexão e de torção não são resistidos por um cabo ideal.

Os cabos são utilizados em vários tipos de estruturas. Nas pontes pênseis e teleféricos são principais elementos portantes, nas linhas de transmissão conduzem a energia elétrica, vencendo vãos entre as torres e são empregados como elemento portante de coberturas de grandes vãos (Süssekind, 1987).

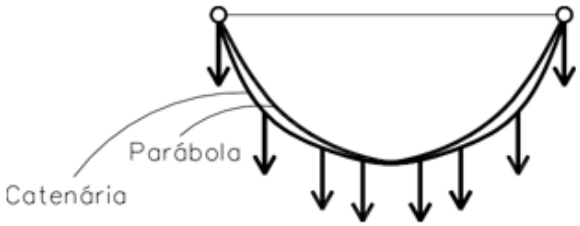
No estudo estático, assume-se a hipótese que os cabos são perfeitamente flexíveis, isto é, possuem um momento fletor e esforço cortante nulo ao longo do comprimento. Dessa forma, os cabos ficam *submetidos apenas a esforços normais de tração.*

As formas assumidas pelo cabo dependem do carregamento que nele atua. Se o carregamento externo for muito maior do que o peso próprio do cabo, este último é desprezado no cálculo. A geometria da configuração deformada do cabo, para um dado carregamento, é denominada *forma funicular* (do latim, *funis* = corda) do cabo.

Exemplos de formas funiculares:

Carregamento	Forma Funicular
	**Triângulo** 
	**Trapezóide** 
	**Polígono** 
Carga Uniformemente Distribuída ao longo do vão 	**Parábola** 
Carga Uniformemente Distribuída ao longo do comprimento do cabo (peso próprio) 	**Catenária** 

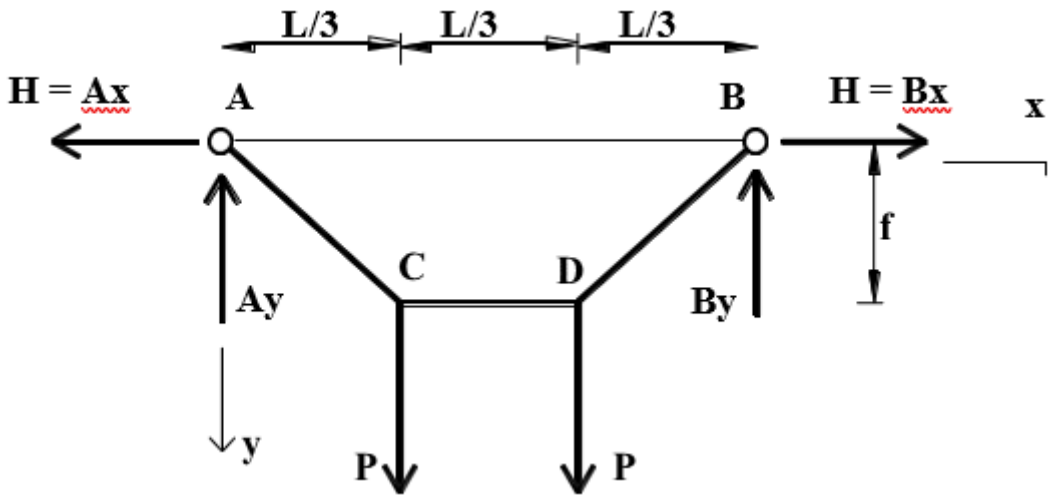
A catária possui uma geometria mais baixa que a parábola. Isto é consequência do peso próprio se concentrar mais nas regiões próximas das extremidades.



A partir de estudos comparativos entre a forma da parábola e da catenária, para várias relações de flecha (f) e vão entre extremidades (L), constata-se que para relações $(\mathbf{f/L}) \leq \mathbf{0,2}$ as formas da parábola e da catenária são praticamente coincidentes. Nestes casos, é mais prático usar a forma da parábola para determinação dos lugares geométricos dos pontos ao longo do cabo.

Reações de Apoios para Cabos:

Seja um cabo que suporta duas cargas concentradas de valor “P”, dispostas nos terços do vão:



Os sistemas do tipo cabo desenvolvem em suas extremidades empuxos horizontais, exigindo que os vínculos em “A” e “B” sejam do 2° gênero.

Por ser um sistema estrutural plano, as equações de equilíbrio a serem satisfeitas serão:

$$\sum F_X = 0 \qquad \sum F_Y = 0 \qquad \sum M_Z = 0$$

Lembrando que para qualquer ponto ao longo do cabo o momento fletor é nulo devido à sua flexibilidade.

Aplicando as equações de equilíbrio ao cabo ACDB:

$$\sum \mathbf{F_X} = \mathbf{0}$$

$$A_X - B_X = 0$$

$$A_X = B_X = H \text{ (empuxo horizontal)}$$

$$\sum \mathbf{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$A_Y + B_Y = 2P$$

$$A_Y = 2P - B_Y = P$$

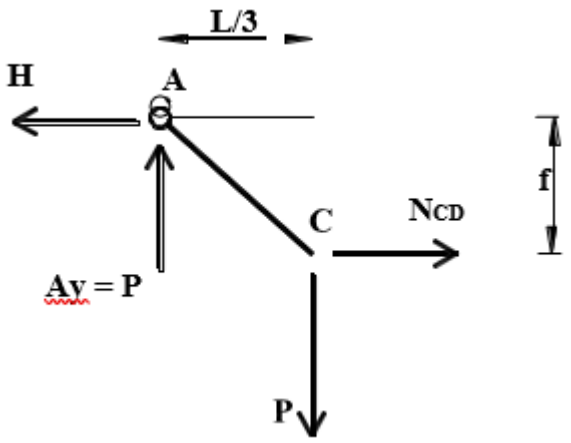
$$\sum \mathbf{M_A} = \mathbf{0}$$

$$\frac{PL}{3} + P\left(\frac{2L}{3}\right) - B_Y \cdot L = 0$$

$$B_Y = P$$

Para o cálculo do empuxo horizontal “H” é necessária uma quarta equação de equilíbrio que sai da hipótese de momento fletor nulo (M=0) para qualquer ponto ao longo do cabo. Escolhendo-se o ponto C:

Faz-se uma seção no cabo que coincida com o ponto C escolhido e trabalha-se com uma parte a esquerda ou à direita do ponto C, substituindo pelo seu efeito na seção.



$$\sum M_C = 0$$

$$-H \cdot f + \frac{(P \cdot L)}{3} = 0$$

$$\mathbf{H = \frac{PL}{3f}}$$

Observa-se que quanto menor a flecha f, maior o empuxo H. E assim encontram-se as reações de apoio do cabo.

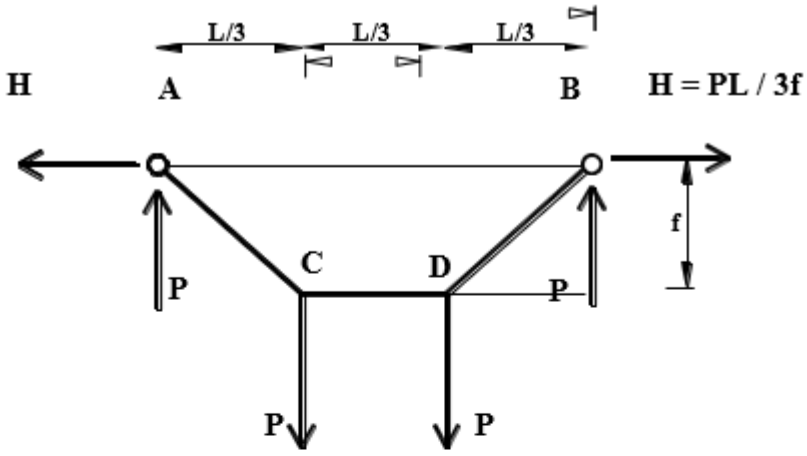
É interessante comparar o cabo com uma viga de substituição, pois as reações de apoio verticais coincidem para o cabo “AB” e para a viga “AB” de idêntico vão e carregamento.

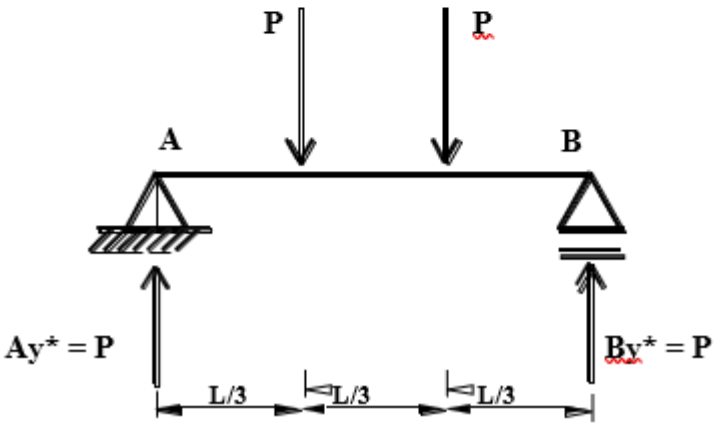
Logo:

$$A_Y \text{ e } B_Y \text{ (no cabo)} = A_Y{}^* \text{e } B_Y{}^* \text{ (na viga)}.$$

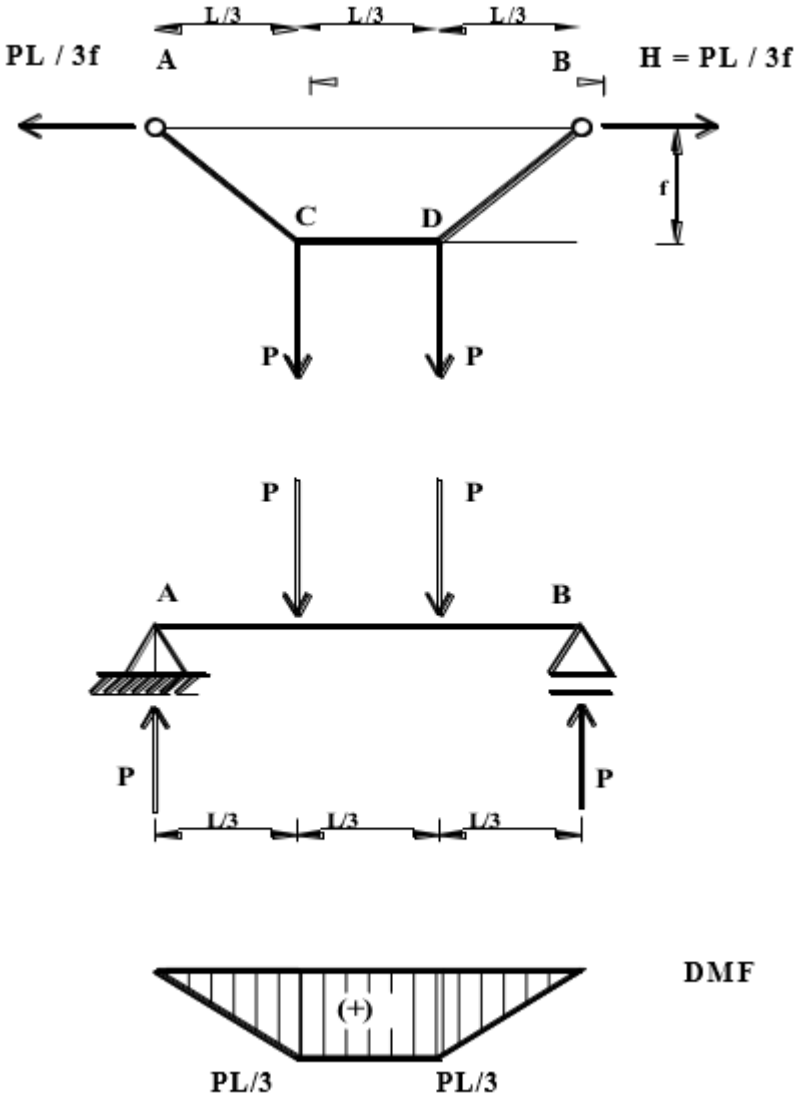
→ Toda referência a reações de apoio e esforços na viga de substituição serão identificados por um asterisco.

Exemplo:





No entanto, a vantagem de comparar o cabo AB a uma viga de substituição AB não está somente nas reações de apoio verticais. Comparemos o empuxo horizontal no cabo ao diagrama de momentos fletores da viga de substituição.



$$M_{máx} = \frac{PL}{3}$$

$$H = \frac{PL}{3f} = \frac{M_{máx}}{f}$$

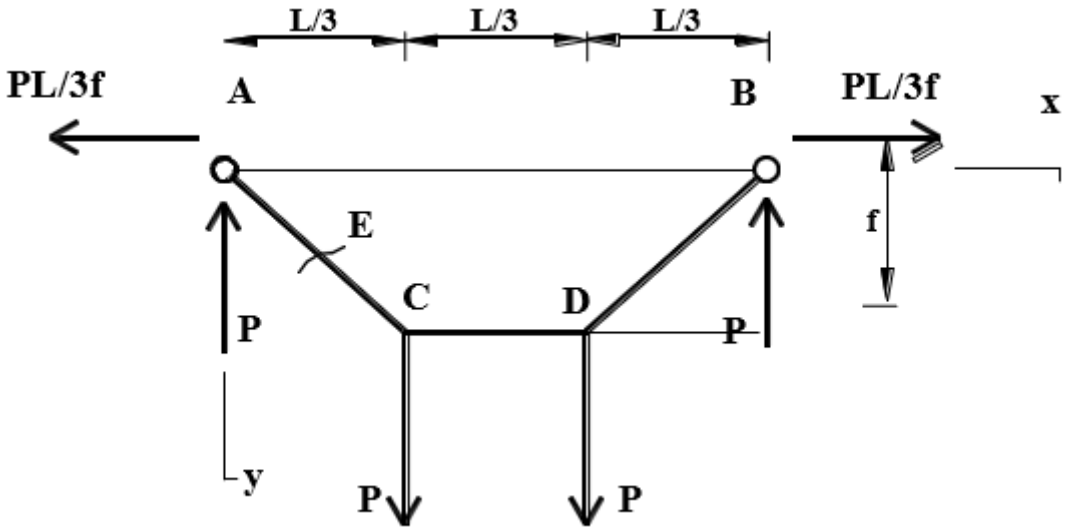
Onde f é a distância vertical máxima do cabo até a linha de fechamento entre as extremidades A e B do cabo.

A relação $\mathbf{H} = \frac{M_{máx}}{f}$ pode ser usada para as demais condições de carregamento.

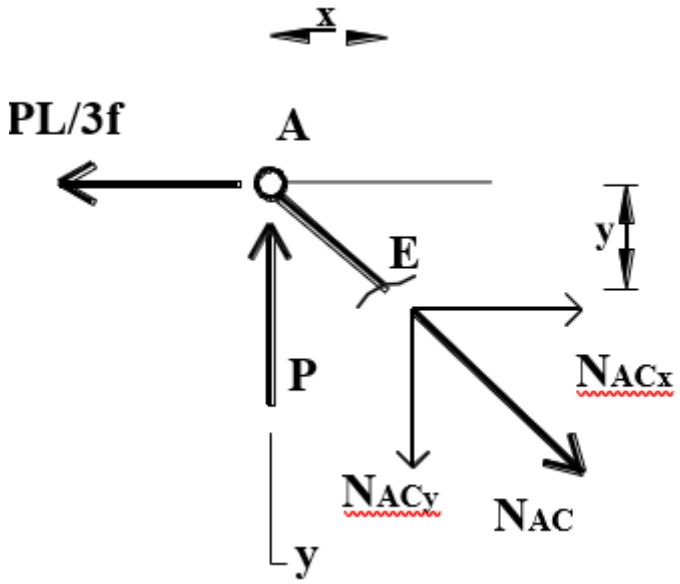
Esforços Normais de Tração Atuantes em Cabos

Uma vez conhecidas as reações de apoio, é possível determinar os esforços normais atuantes no cabo.

Usando mais uma vez o exemplo do cabo submetido a duas cargas concentradas equidistantes, de valor “P” cada uma:



Esforço normal no trecho AC:



Substitui-se a parte do cabo retirada, pelo seu efeito, a Força Normal N_{AC}.

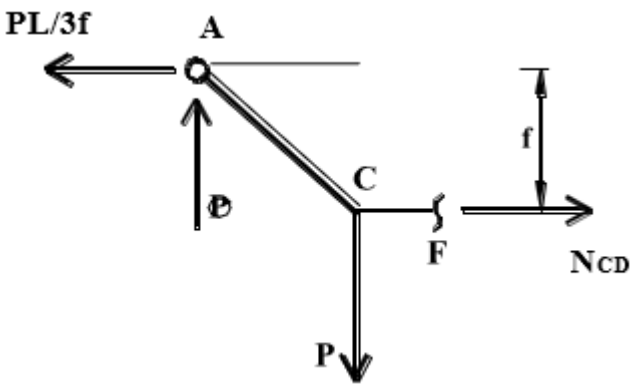
Aplicam-se as equações de equilíbrio:

$$\sum F_X = 0$$
$$N_{AC_X} = (PL/3f)$$
$$N_{AC_X} = H$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$N_{AC_Y} = P$$

$$N_{AC}{}^2 = (N_{AC_X})^2 + (N_{AC_Y})^2$$

Esforço normal no trecho CD:



$$\sum F_X = 0 \qquad \sum F_Y = 0$$

$$N_{CD} = \frac{PL}{3f} \qquad P - P = 0$$

$$N_{CD} = H$$

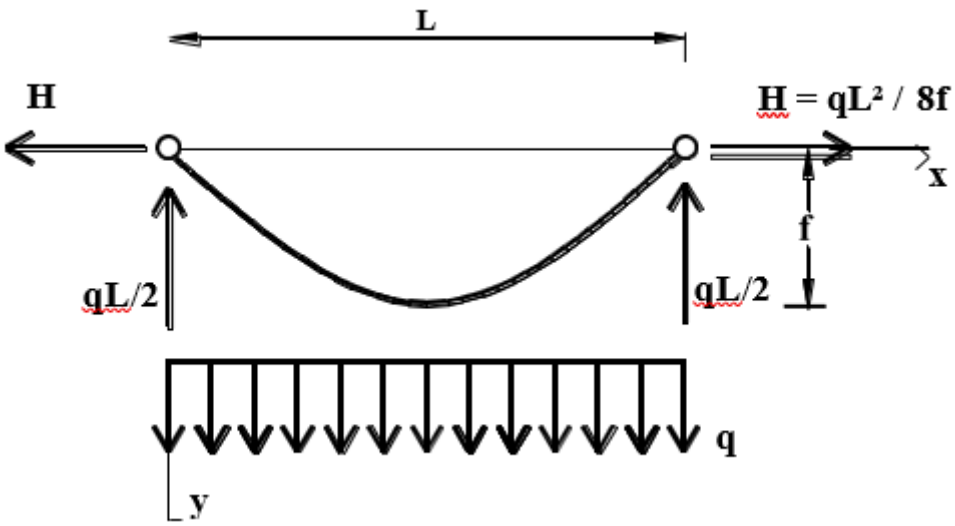
$$N_{CD} = H$$

Esforço normal no trecho DB:

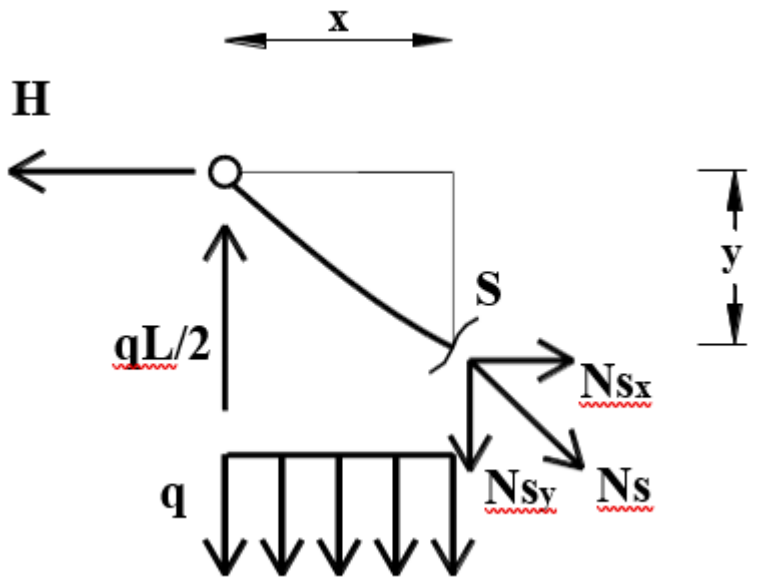
$$N_{DB} = N_{AC} = [(PL/3f)^2 + P^2]^{\frac{1}{2}}$$

Observa-se, da comparação entre N_{AC} e N_{CD}, que o esforço normal máximo de tração no cabo AB ocorre nos trechos AC e DB, trechos adjacentes aos apoios das extremidades. Esta é uma das características dos cabos, os esforços normais máximos ocorrem nas seções dos cabos próximas aos vínculos externos, pois é onde a componente vertical do esforço normal, N_Y, é de maior valor.

Calculando agora os esforços normais para um cabo com carga uniformemente distribuída ao longo do vão:



Cortando o cabo em uma seção genérica de coordenadas (x,y):



Aplicando-se as equações de equilíbrio:

$$\sum F_X = 0$$

$$N_{S_X} = H$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$N_{S_Y} - qL/2 + q \cdot x = 0$$

$$N_{S_Y} = qL/2 - q \cdot x$$

Para x = 0 $\rightarrow N_{S_Y} = qL/2$

Para x = $L/2 \rightarrow N_{S_Y} = 0$

Para o ponto x = L / 2, onde ocorre a flecha f, distância máxima da linha AB, não há componente vertical do esforço normal de tração.

Logo, o esforço normal varia ao longo do comprimento do cabo:

Para x = 0

$$N_S = \left[\left(N_{S_X}\right)^2 + \left(N_{S_Y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$N_S = [(H)^2 + (qL/2)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{Valor Máximo}$$

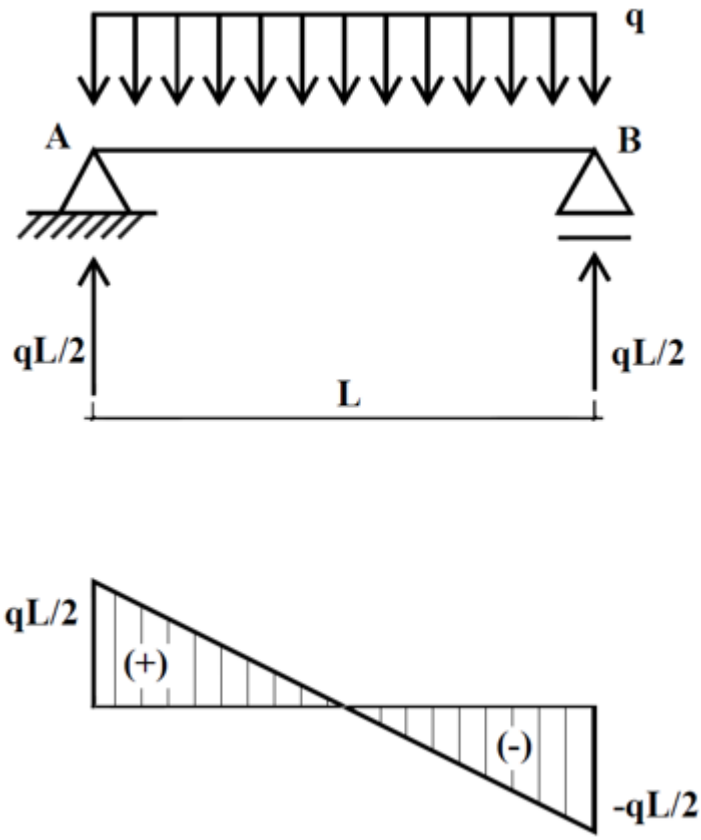
Para x = $L/2$

$$\mathbf{N_S = \left[\left(N_{S_X}\right)^2 + \left(N_{S_Y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{N_S = [(H)^2 + (0)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{N_S = H \rightarrow Valor\ Mínimo}$$

Comparando o valor de N_{S_Y} com os esforços da viga de substituição submetida a idêntico carregamento, constata-se que a variação de N_{S_Y} para x = 0 é $qL/2$ e para $x = L/2$ é nulo, coincidindo com a variação do esforço cortante na viga:



Portanto, pode-se concluir que o esforço normal de tração para um cabo é estimado pela expressão:

$$N_S = \left[\left(N_{S_X}\right)^2 + \left(N_{S_Y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$N_S = \left[(H)^2 + (V_S{}^*)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Onde,

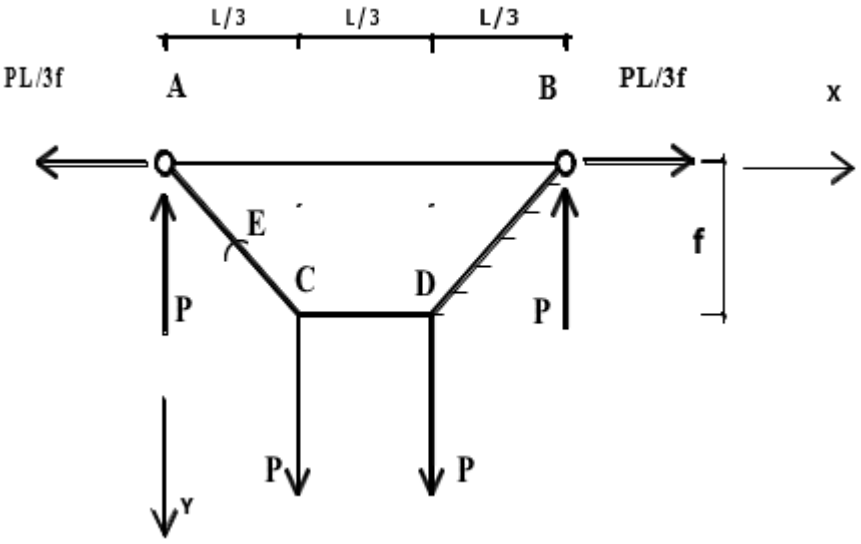
H: Empuxo horizontal nas extremidades do cabo

e;

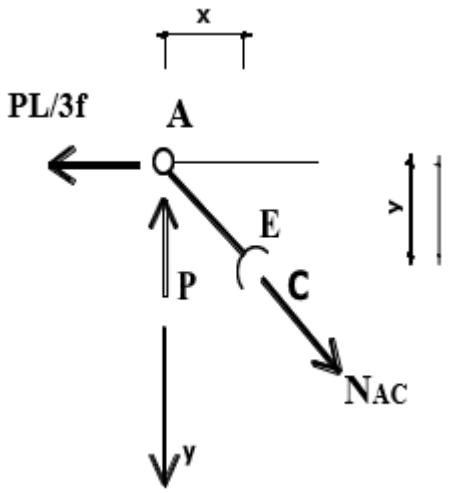
$V_S{}^*$: Esforço cortante para uma seção genérica de viga de substituição.

Conformação Geométrica Final do Cabo:

Fazendo, mais uma vez, uso da viga da hipótese de momentos fletores nulos para qualquer ponto genérico sobre o cabo AB.



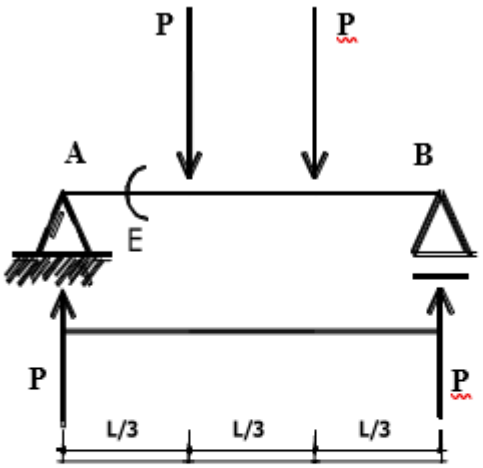
Para um ponto genérico “E” que pertença ao cabo e tenha coordenadas (x,y):

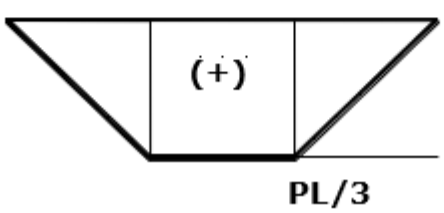


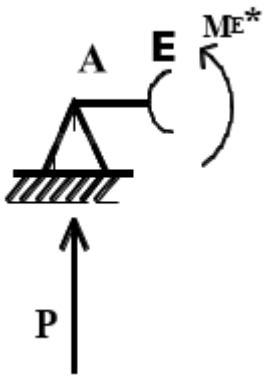
O ponto “E” está situado a uma distância x do apoio “A” do cabo AB, a equação de momentos fletores é dada por:

$$\sum M_E = 0$$
$$-H \cdot y + P \cdot x = 0$$
$$y = \frac{P \cdot x}{H}$$
$$y = 3f \cdot \frac{x}{L}$$

A configuração geométrica do cabo para o trecho AC é definida por uma equação do 1° grau.







$$\sum M_E^{\,*} = 0$$
$$P \cdot x - M_E^{\,*} = 0$$
$$M_E^{\,*} = P \cdot x$$

Comparando a expressão do momento no ponto “E” para a viga de substituição com a expressão encontrada para a configuração geométrica do cabo para o ponto “E”:

Viga de Substituição → $M_E^* = P \cdot x$

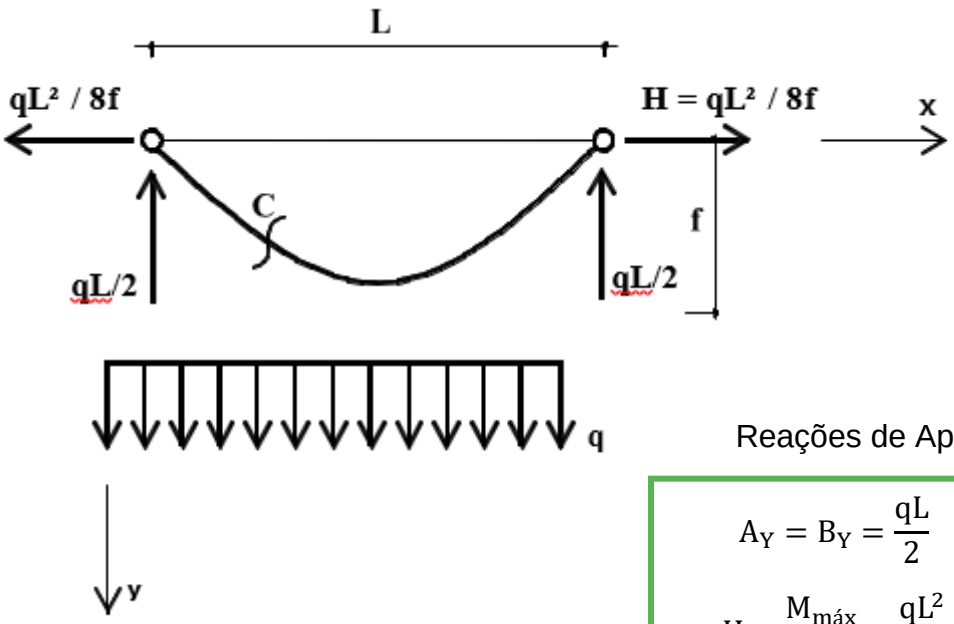
Cabo → $y_E = (P \cdot x_E)/H$

Percebe-se que mais uma vez existe uma relação entre a cota vertical y do cabo e o momento fletor para a viga de substituição na mesma seção, portanto, deduz-se que a cota vertical y_S, para uma seção genérica S do cabo, é igual ao M_S^* dividida pelo empuxo horizontal H na viga de substituição para uma seção S de mesma posição horizontal que no cabo:

$$\mathbf{y_S = M_S^* / H}$$

Dessa forma, pode-se determinar a cota de qualquer ponto do cabo a partir do momento fletor na viga de substituição.

Pode-se também deduzir a forma funicular para um cabo submetido a carga uniformemente distribuída ao longo do vão:

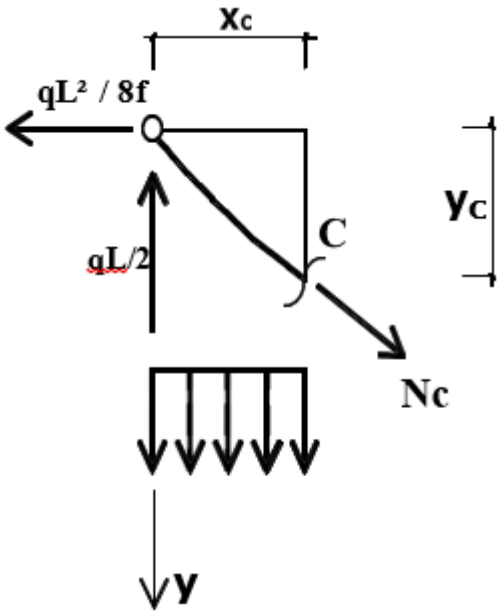


Reações de Apoio:

$$A_Y = B_Y = \frac{qL}{2}$$

$$H = \frac{M_{máx}}{f} = \frac{qL^2}{8f}$$

Escolhendo um ponto genérico “C”, com posição (x_C, y_C), passando uma seção, o diagrama de equilíbrio estático fica:



$$\sum M_C = 0$$

$$-\frac{1}{2} q \cdot x_C{}^2 - H \cdot y_C = 0$$

$$y_C = q \cdot (L \cdot x_C - x_C{}^2)/2H$$

$$\mathbf{y_C = 4f \cdot (L \cdot x_C - x_C{}^2)/L^2}$$

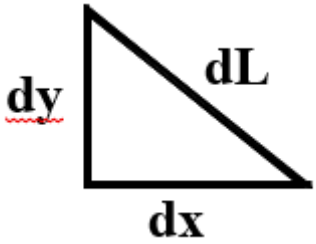
Generalizando para um ponto qualquer sobre o cabo, de coordenadas (x,y):

$\mathbf{y = 4f \cdot (L \cdot x - x^2)/L^2}$ → **Equação da Conformação Geométrica do Cabo submetida a carga "q" apenas.**

Comprimento total de cabo submetido a carga "q" apenas:

Uma vez conhecida a linha elástica do cabo na conformação deformada, pode- se estimar o comprimento total do cabo submetido à carga "q" apenas: L_C.

O comprimento total do cabo L_C é obtido a partir da expressão da linha elástica y= f(x), através da integração ao longo do comprimento:



$$dL^2 = d_X{}^2 + d_Y{}^2$$

$$dL = \sqrt{d_X{}^2\left(1 + d_Y{}^2/d_X{}^2\right)} = d_X\sqrt{1 + \frac{d_Y{}^2}{d_X{}^2}}$$

$$L_C = \int_0^L dL = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{d_Y{}^2}{d_X{}^2}\right)}\, d_X$$

Para a situação de carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão:

$$y = 4f \cdot (L \cdot x - x^2)/L^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4f \cdot (L - 2x)/L^2$$

Substituindo na integral:

$$L_C = \int_0^L \left\{1 + \left[\frac{4f}{L^2}(L - 2x)\right]^2\right\}^{0,5} dx$$

A solução desta integral é feita pelo desenvolvimento do integrando sob a forma de série. Utilizando este tipo de resolução de integrais definidas, encontra-se a seguinte expressão:

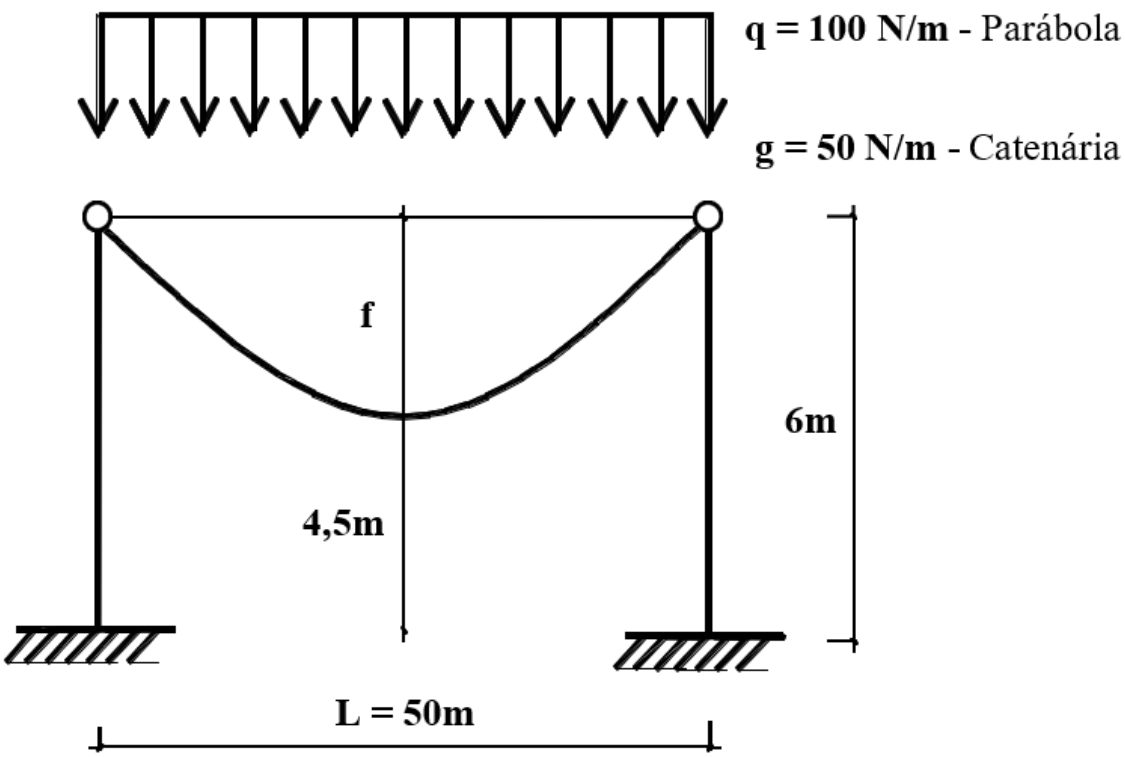
$$\mathbf{L_C \cong L[1 + 8/3\,(f/L)^2]}$$

Comprimento total de um cabo de forma funicular parabólica, submetido à carga uniformemente distribuída ao longo do vão.

Nas situações de cabos submetidos a peso próprio, cuja forma funicular é uma catenária, mas para a relação $f/L \leq 0{,}2$, pode-se utilizar a mesma expressão anterior para estimar o comprimento do cabo L_C.

Exemplo:

1) Qual o comprimento total do cabo que suporta uma sobrecarga uniformemente distribuída ao longo do vão de 100 N/m e que possui peso próprio igual a 50 N/m, sabendo-se que os pontos de fixação estão no topo de postes de 6 m de altura e que estão afastados entre si de 50 m? Além disso, há a informação que o ponto mais baixo do cabo está 4,5 m acima do solo.



Flecha (f) = 6m - 4,5m = 1,5m

$$f/L = 1{,}5/50 = 0{,}03 \leq 0{,}2$$

Pode-se utilizar a expressão da parábola para substituir a geometria da catenária:

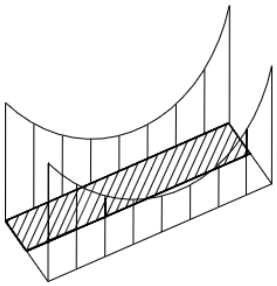
$$L_C \cong L[1 + 8/3\,(f/L)^2]$$

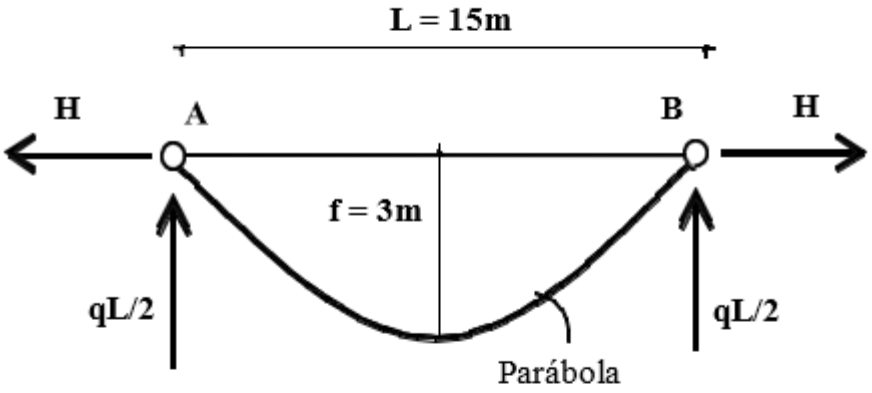
Considerando-se o erro na substituição da catenária pela parábola desprezível:

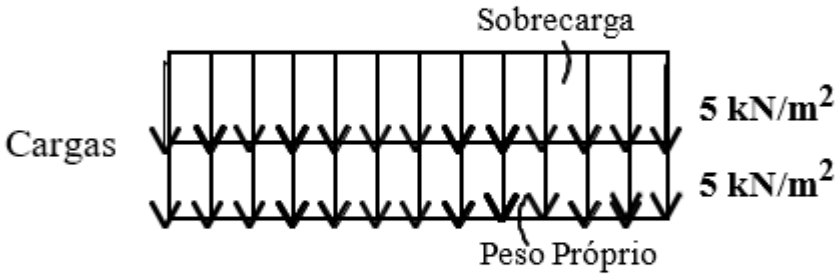
$$L_C = 50[1 + 8/3(1{,}5/50)^2] = 50{,}12\ \text{m}$$

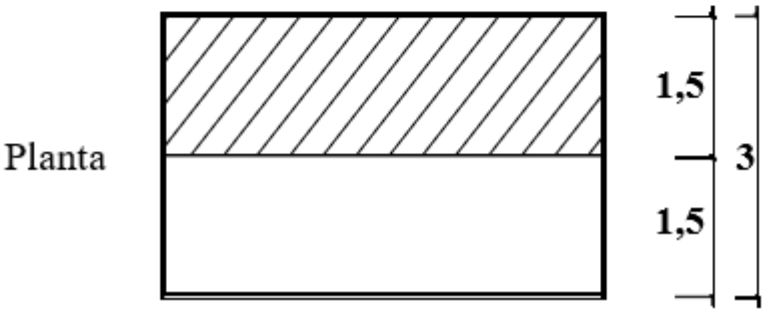
2) Exemplo de Aplicação (Extraído de Salvadori e Levy, pág.194)

Uma passarela, que liga duas edificações afastadas de 15,0 m, possui 3,0 m de largura e deve suportar uma sobrecarga de 5 kN/m^2 além de seu peso próprio, também estimado em 5 kN/m^2. A passarela será suspensa por 2 cabos com uma flecha de 3m. Determine a força normal máxima que tracionará o cabo.









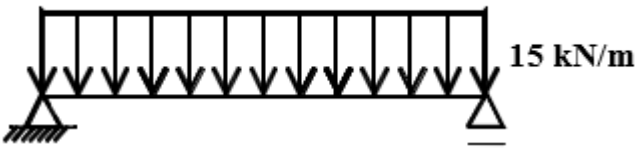
Carga distribuída por cabo:

$$qA/2L = \frac{(5+5)\text{kN/m}^2 \times (15 \times 3)\text{m}^2}{2 \times 15\text{m}} = 15\ \text{kN/m}$$

Como o cabo e o carregamento são simétricos A_y=B_y, então:

$$A_y = B_y = 15 \times 15/2 = 112{,}5\ \text{kN}$$

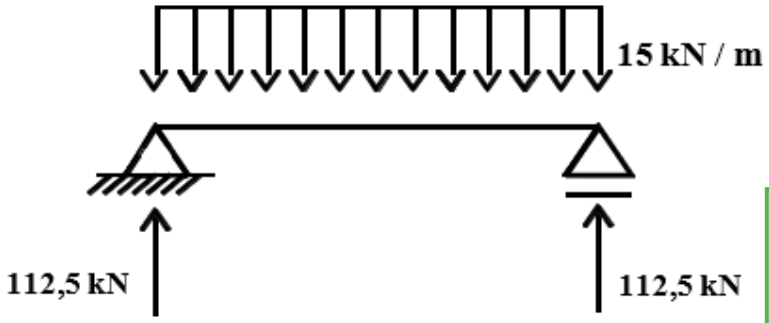
$$H = M_{máx}/f$$
$$H = qL^2/8f = \frac{15\text{kN/m} \times (15\text{m})^2}{8 \times 3\text{m}}$$
$$H = 140{,}62\ \text{kN}$$

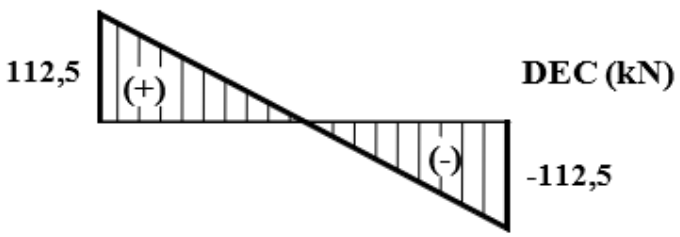


$$M_{máx} = qL^2/8$$

Força Normal Máxima

$$N_S = [(H)^2 + (V_S{}^*)^2]^{1/2}$$
$$V_S{}^* = V_{máx}{}^*, \text{para } N_{máx}$$





$$V_{máx}{}^* = 112{,}5\ kN, nos\ apoios$$

$$N_S = [(H)^2 + (V_S^*)^2\ ]^{1/2}$$

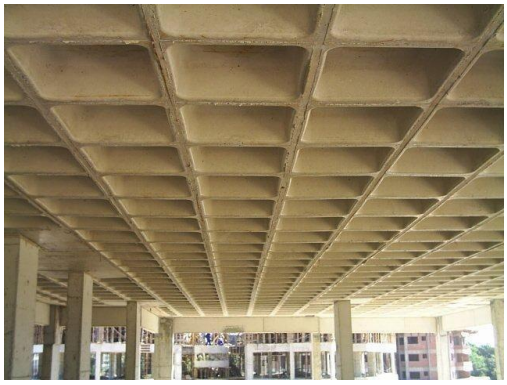
$$N_S = [(140{,}63)^2 + (112{,}5)^2\ ]^{1/2}$$

$$N_S = 180{,}09\ kN$$

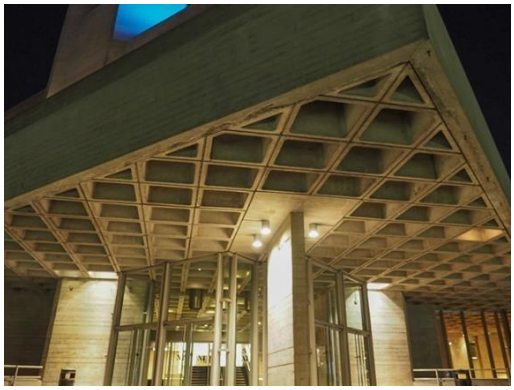
O esforço normal máximo ocorremos extremos, próximo aos vínculos “A” e “B”

10. Grelhas

Grelha é uma estrutura reticulada plana submetida a carregamentos perpendiculares ao seu plano. Na construção civil, este tipo de sistema estrutural é composto por um sistema de vigas, perpendiculares ou não entre si, que se interceptam, estando interligadas nos pontos de interseção (SET, 403, 1998).

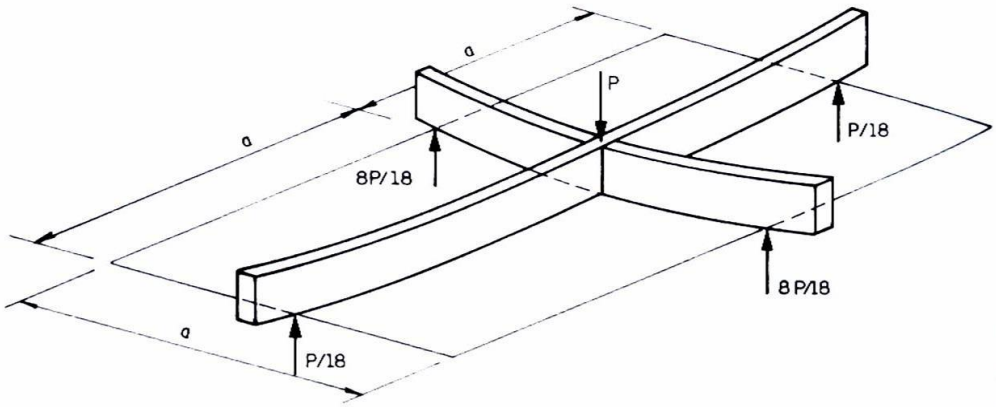


Malhas Quadradas



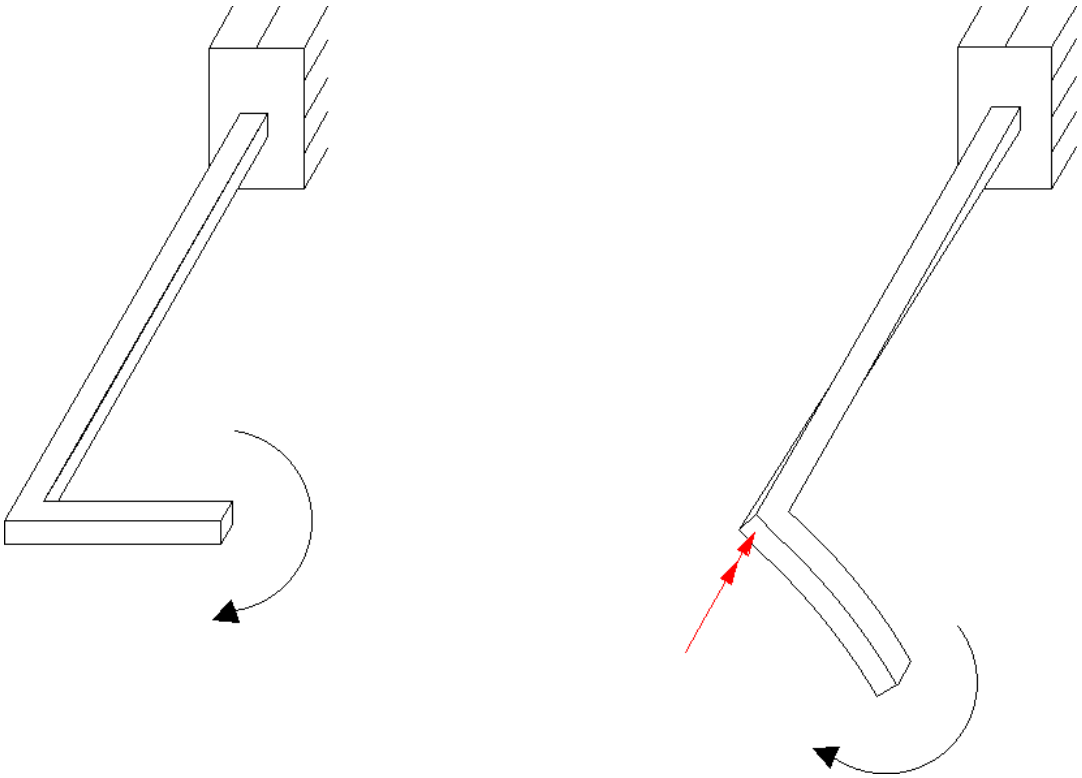
Malhas Oblíquas

A vantagem deste sistema de vigas interligadas está no funcionamento conjunto de todos elementos resistentes para qualquer posição de carregamento.

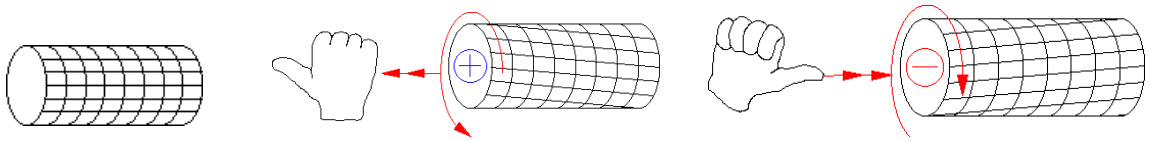


No sistema de ilustração acima, observa-se que uma parcela maior da carga concentrada “P” é transmitida dos apoios pela viga de menor vão, enquanto uma parcela menor é transmitida na direção do maior vão. A viga mais rígida, a mais curta, será mais solicitada em comparação com a viga mais flexível, a mais longa.

Momentos torsores poderão ocorrer em grelhas:



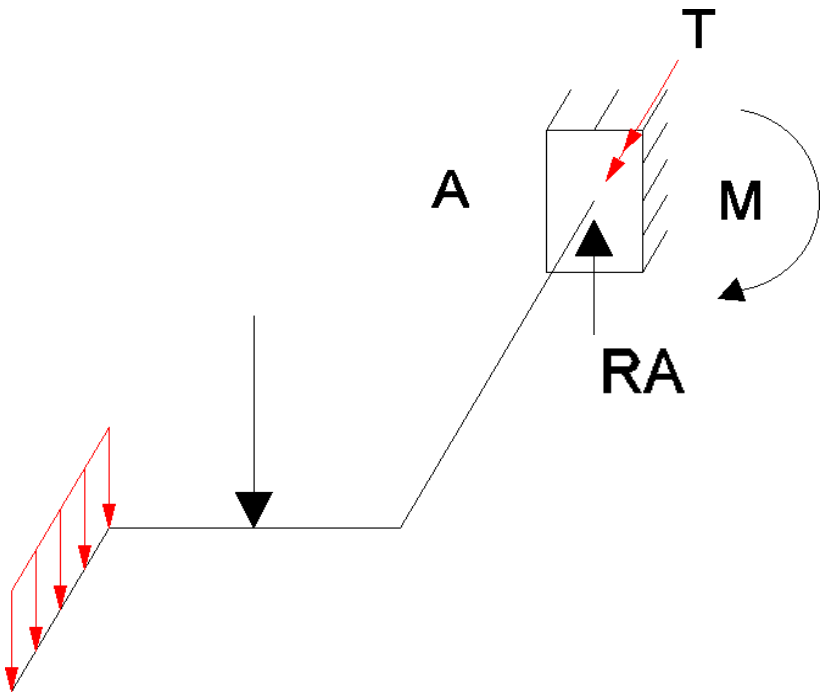
A torção é representada por uma seta dupla, o seu sinal por convenção é utilizando a regra da mão direita, quando o polegar está saindo do objeto o sinal é positivo e quando o polegar entra no objeto é considerado negativo.



As grelhas mais comuns no cotidiano são as grelhas hiperestáticas, contudo, nesta disciplina, serão estudadas apenas grelhas **isostáticas e restringidas,** especificamente os dois tipos de grelhas abaixo:

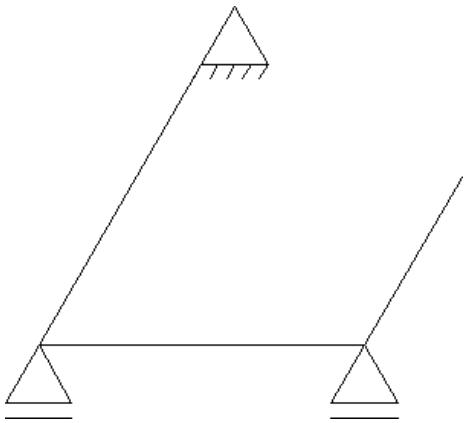
Grelha Engastada e Livre:

Para resolução, não há necessidade de calcular as reações externas inicialmente, pois todas as cargas serão absorvidas no ponto A e ao final do cálculo da grelha será obtido os valores das reações externas.

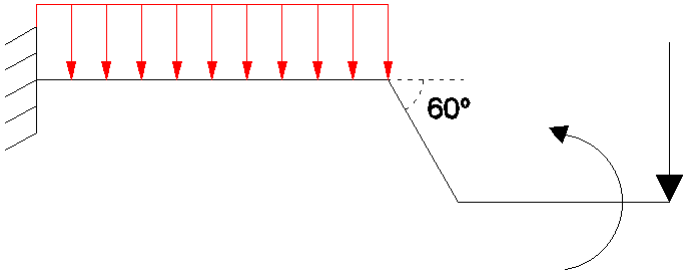


Grelha Triapoiada:

Para a resolução, há necessidade de calcular as reações externas inicialmente pois as cargas irão ser absorvidas pelos 3 apoios que não devem estar alinhados, mas formando um plano.

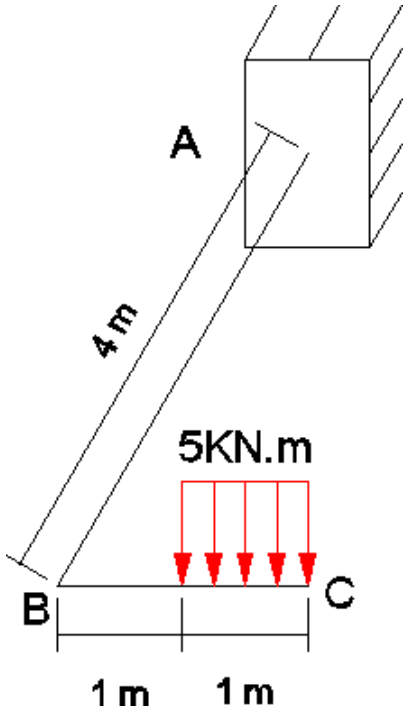


Há casos especiais, por exemplo quando o ângulo entre as grelhas não formam 90°, uma parcela do torçor continua sento torçor e a outra parcela transforma-se em momento fletor, e vice-versa, sendo necessário realizar a decomposição das forças.

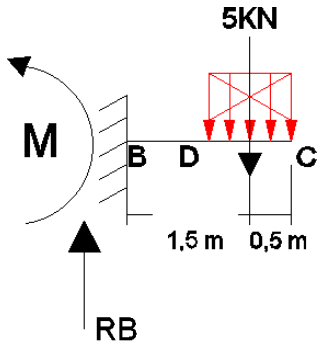


Exemplo:

1. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.



Primeiramente, o cálculo deve começar pela haste BC, encontrando-se as reações no ponto B.



$\sum F_y = 0$

$R_a - 5 = 0$

$R_b = 5KN$

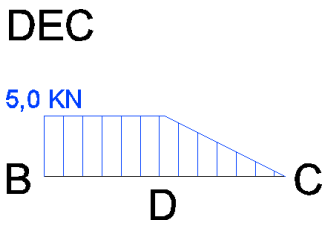
$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = 0$

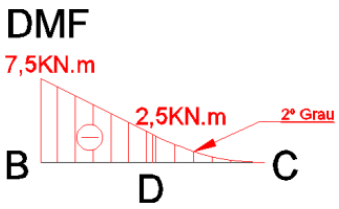
$M_B - 5*1,5 = 0$

$M_B = 7,5$ KN.m

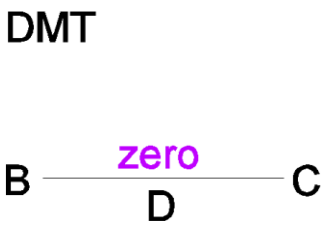
Como a estrutura está engastada e livre, não há necessidade de começar a resolução calculando as reações em A.

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes e Diagramas de Momentos Fletores para a haste BC como aprendido anteriormente, quanto ao sinal do Esforço Cortante, este poderá ser discrepante, dependendo do lado que observarmos.

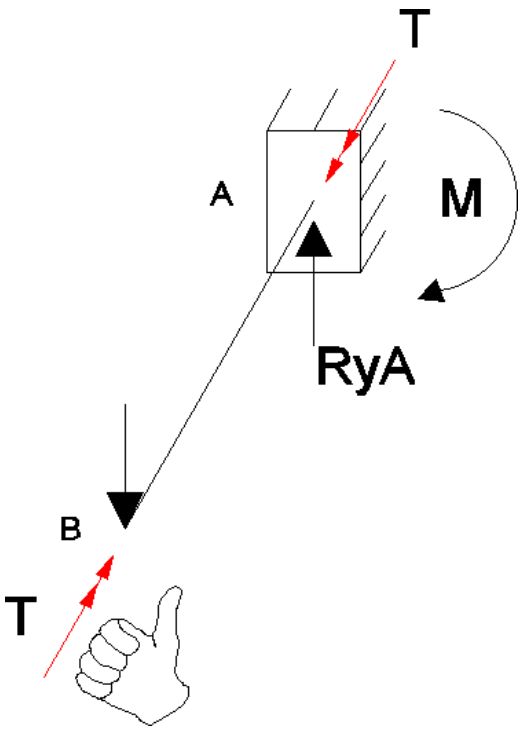




Neste caso, o Momento Torsor será zero em toda a haste.



Depois, transferem-se as reações encontradas para o mesmo ponto B da haste AB. Para transferir as reações, a força R_B será transferida com a mesma intensidade e sinal inverso para a haste AB. Quanto ao Momento Fletor, será transformado totalmente em Momento Torsor (ângulo entre as barras 90°) e será utilizada a regra da mão direita para identificar o sentido e sinal do Momento Torsor, o polegar deverá ficar na mesma direção da barra AB e quanto ao sentido (entrando ou saindo), será verificado ao fechar os dedos que deverão girar no mesmo sentido do momento resultante da barra BC. Após isso, finalmente calculemos as reações em A:



$\sum F_y = 0$

$R_A - R_B = 0$

$R_A - 5 = 0$

$R_A = 5\ KN$

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$

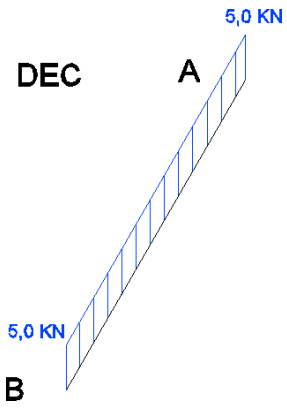
$M_A + 5 \times 4 = 0$

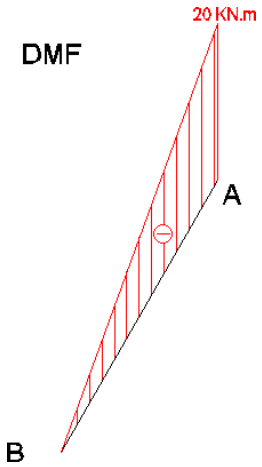
$M_B = -20 KN.m$

$\Sigma M_T = 0$

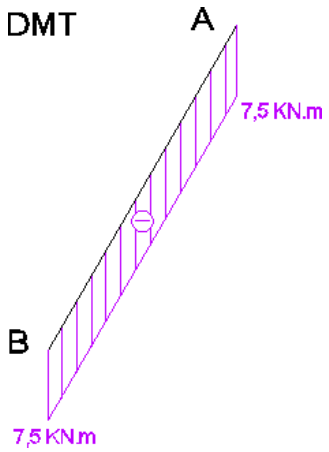
$-M_T - 7{,}5 = 0 \therefore M_T = -7{,}5 KN.m$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes e Diagrama de Momentos Fletores para a haste AB:

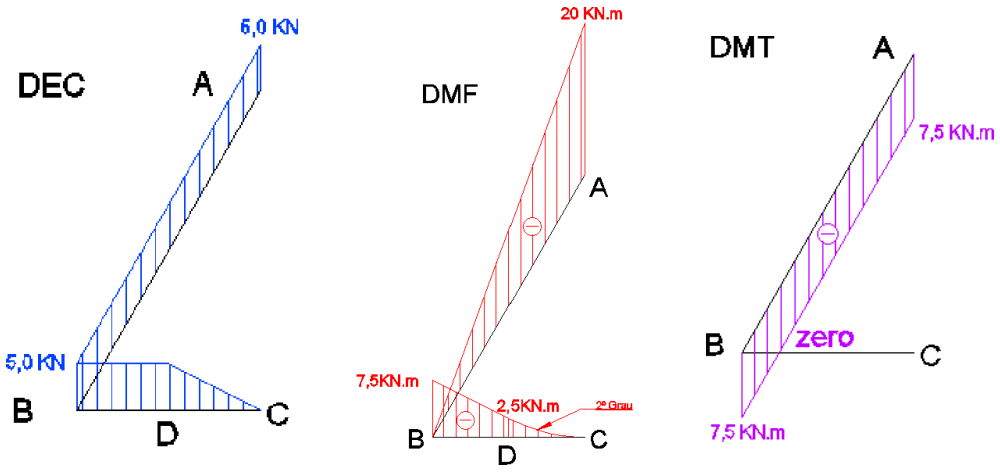




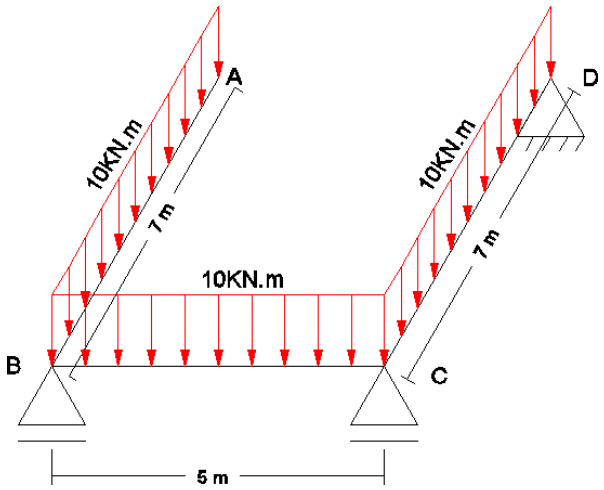
O momento fletor da haste BC será transferido como um momento torsor para a haste AB com a mesma intensidade, pois o ângulo entre as barras é de 90° e o sinal dado pela regra da mão direita, que neste caso será negativo.



Agora, para fins didáticos, juntamos os diagramas:

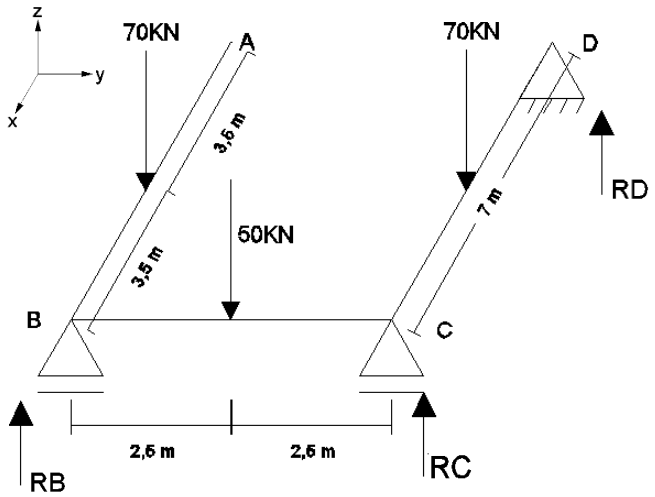


2. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.



Como a grelha é tri-apoiada, deve-se começar a resolução calculando as reações de apoio externas.

Apenas para melhorar a visualização, retiramos a carga distribuída e colocamos a equivalente no centroide do retângulo.



$\sum F_X = 0$

$R_B + R_C + R_D - 70 - 50 - 70 = 0$

$R_B + R_C + R_D = 190$

Ao realizarmos o cálculo do momento, é válido ressaltar que o cálculo é realizado referente a uma barra, diferentemente de outras situações que é utilizado um ponto.

$\circlearrowleft^{+} \sum M_{BC} = 0$

$-70 * 3,5 + R_D * 7 - 70+3,5 = 0$

$\circlearrowleft^{+} \sum M_{KD} = 0$

$70*5 - R_B * 5 - 70 * 3,5 = 0$

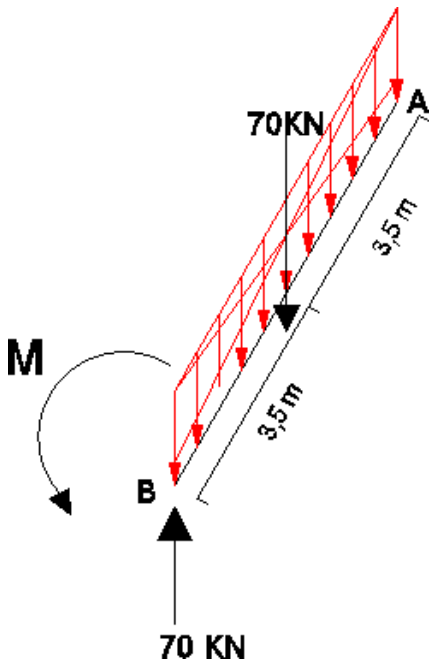
$R_B = 95KN$

Retornamos para a Equação (1) e, substituindo os valores obtidos, chegamos ao valor de RyC:

$R_B + R_C + R_D = 190$

$R_C = 25KN$

Calculadas as reações, poderemos dar início ao cálculo dos Diagramas começando pela reação da barra AB, por esta se encontrar em balanço.

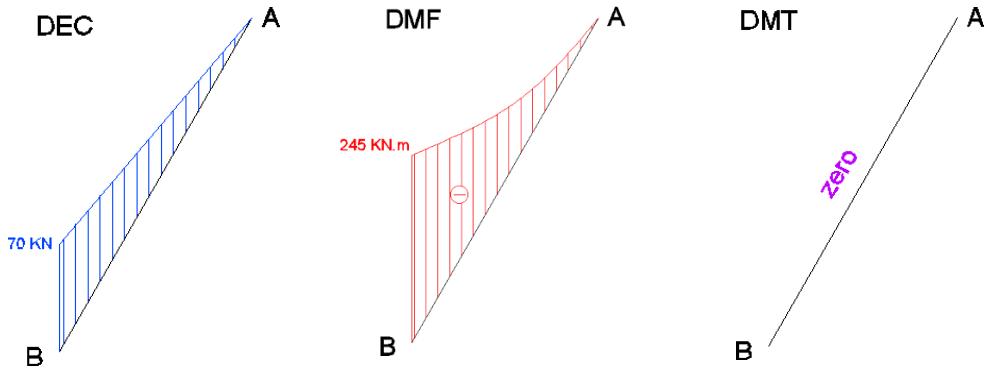


$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = 0$

$-M_B + 70*3,5 = 0$

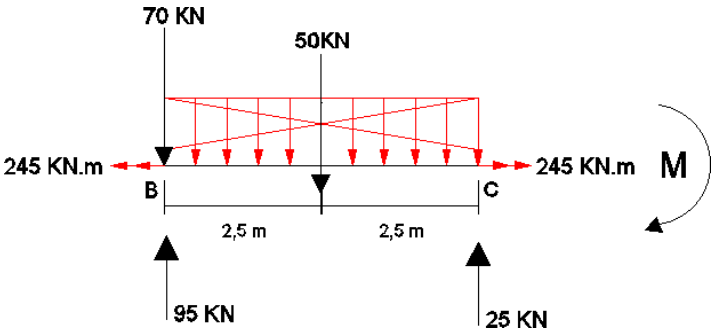
$M_B = -245KN.m$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, Diagrama de Momentos Fletores e Diagrama de Momentos Torçores para a haste AB, frisando que não existe Momento Torçor nesta haste:



Depois, transferem-se as reações encontradas para o mesmo ponto B da haste BC, inclusive o Momento Fletor que se tornará Momento Torçor.

Observação: No ponto B possuímos a reação da haste anterior e o Ry_B, resultando em uma força com sinal positivo de 25KN, que é mantida com o sinal original da reação calculada.



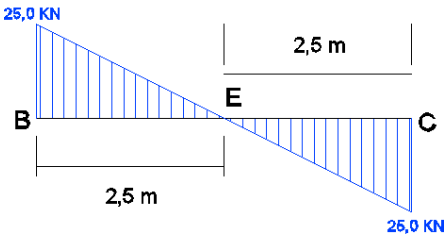
$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$$

$$M_{C\,esq} = 25 \times 5 - 50 \times 2{,}5$$

$$M_{C\,esq} = 0$$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, observamos a seguir que possui um ponto onde o Esforço é nulo e o Momento Fletor será máximo, para obtermos suas coordenadas utilizamos a seguinte fórmula:

DEC



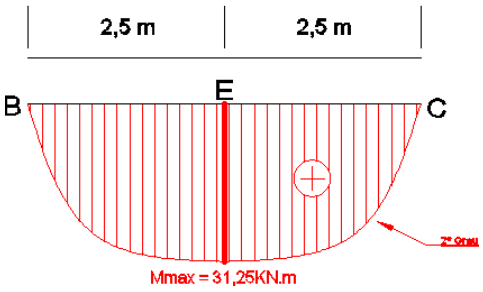
$$E = \frac{V}{Q}$$

Neste caso, como a carga distribuída (Q) é de 10 KN, então:

$E = \frac{25}{10} = 2{,}5m$

Traçando o Diagrama de Momento Fletor e calculando o valor do Momento Máximo:

DMF

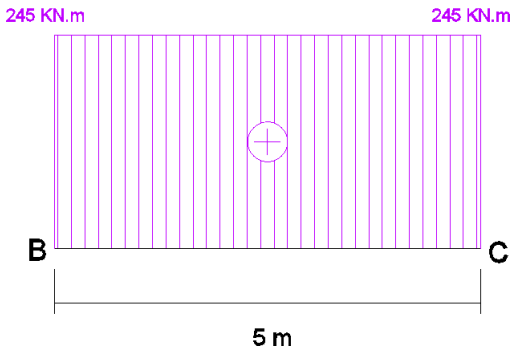


$$M_{E\,esq} = 25 * 2{,}5 - 10 * 2{,}5 * \frac{2{,}5}{2}$$

$$M_{E\,esq} = 31{,}25\ kN.m$$

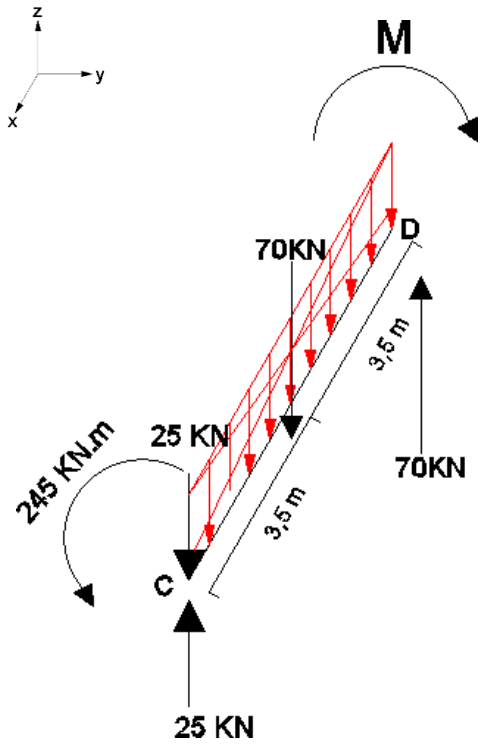
O momento fletor da haste BC será transferido como um momento torçor para a haste AB com a mesma intensidade, pois o ângulo entre as barras é de 90° e o sinal é dado pela regra da mão direita, neste caso, serão positivo.

DMT



Depois, transferem-se as reações encontradas para o mesmo ponto C da haste BC, inclusive o Momento Torçor que se tornará Momento Fletor e calculemos o Momento Fletor em D.

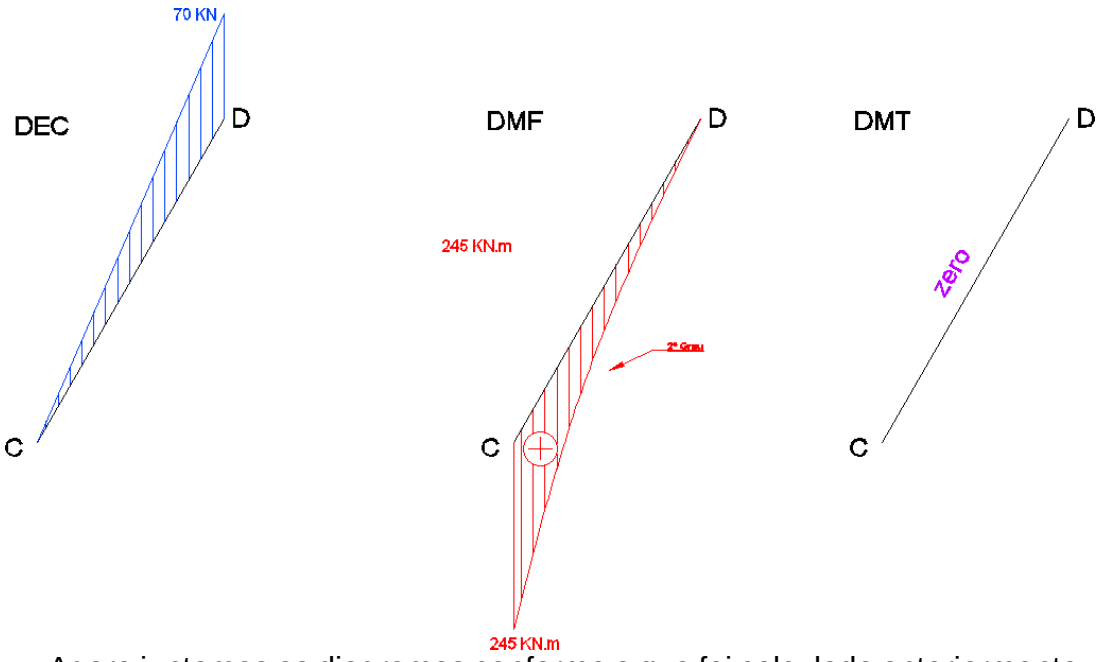
Observação: No ponto C possuímos a reação da haste anterior e o Ry_C, resultando em uma força nula.



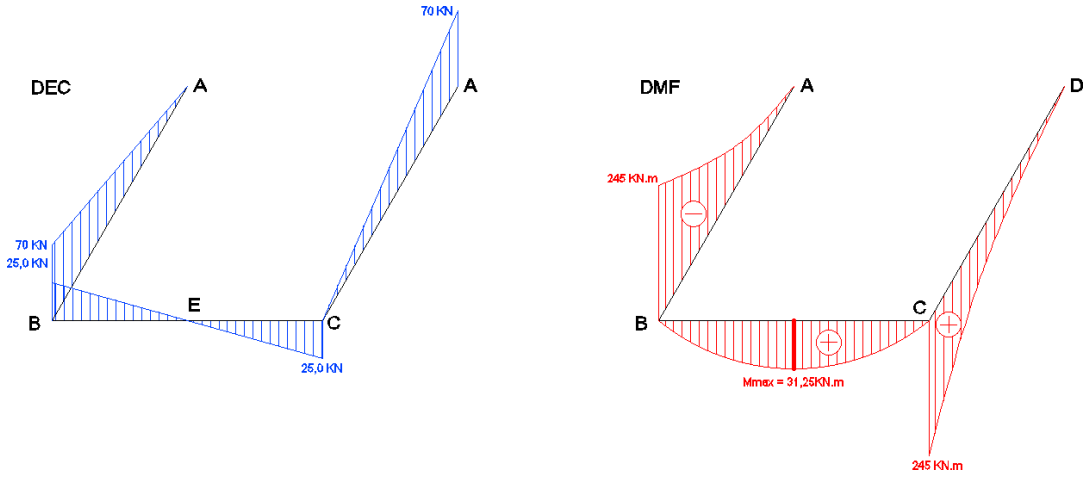
$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_D = 0$$

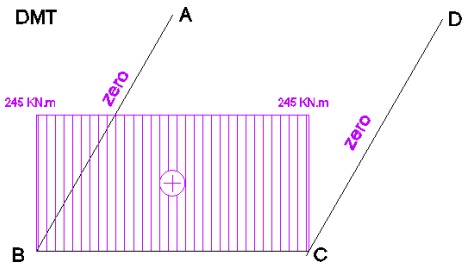
$$245 - 70 \times 3{,}5 = 0$$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, Diagrama de Momentos Fletores e Diagrama de Momentos Torçores para a haste CD, frisando que não existe Momento Torçor nesta haste por conta da ausência de momento no ponto C da haste BC.

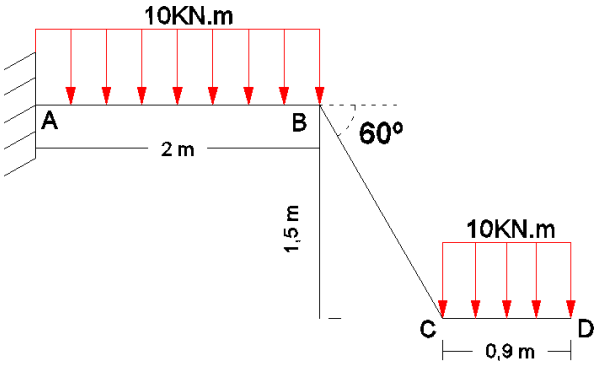


Agora juntamos os diagramas conforme o que foi calculado anteriormente:



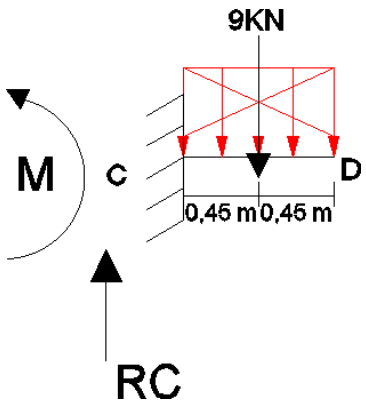


3. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.



Como a estrutura está engastada e livre não há necessidade de começar a resolução calculando as reações em A.

Primeiramente, o cálculo deve começar pela haste CD, encontrando-se as reações no ponto C.



$$\sum F_x = 0$$

$$R_c - 9 = 0$$

$$R_c = 9\ kN$$

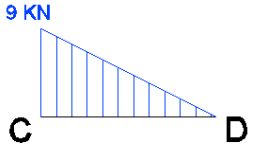
$$\circlearrowleft^{+} \sum M_C = 0$$

$$M_C - 9 * 0{,}45 = 0$$

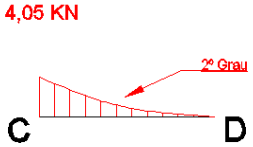
$$M_C = 4{,}05 kN.m$$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, Diagrama de Momentos Fletores e Diagrama de Momentos Torçores para a haste CD:

DEC

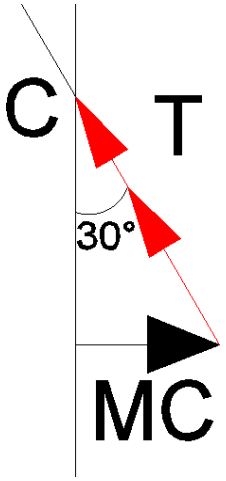


DMF



DMT

Nesta situação, como as hastes não formam 90°, o Momento Fletor não se tornará totalmente Momento Torçor, uma parcela continuará sendo Fletor, para isso, calculemos:

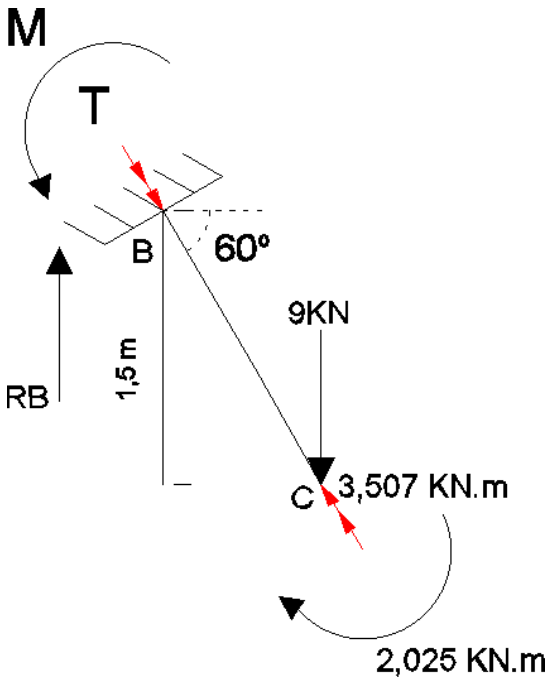


$T = -4{,}05 * \cos 30° T = -3{,}507 KN.m$

$M_C = -4{,}05 + \text{sem } 30°$

$M_C = -2{,}025\ kN.m$

Agora transmitiremos as reações para barra BC e calculamos as reações no ponto B.



$\sum F_z = 0$

$R_B - 9 = 0$

$R_B = 9kN$

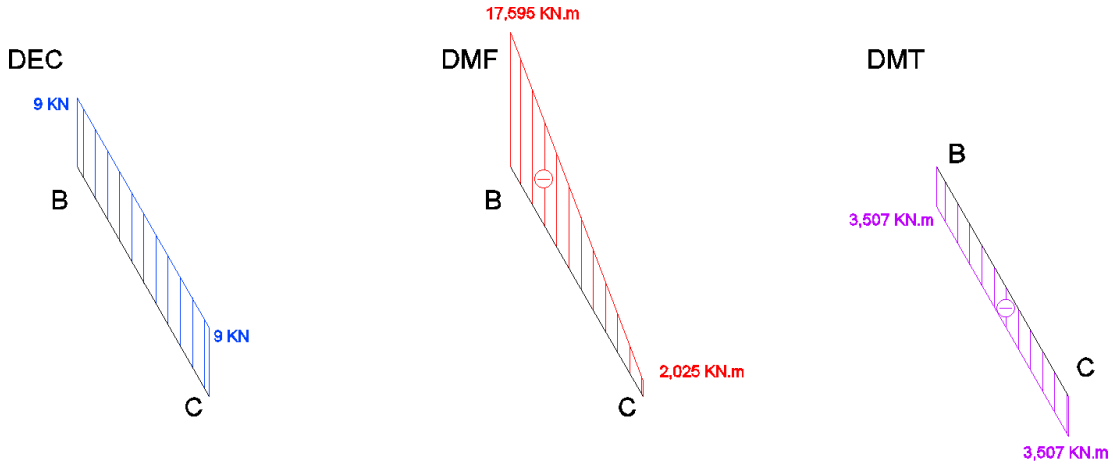
$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = 0$

$M_B = -2{,}025 - 9 * \frac{1{,}5}{sen60°}$

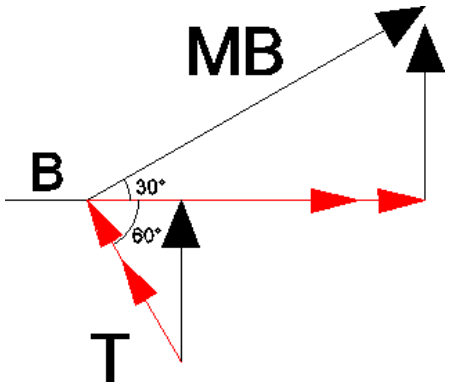
$M_B = -17{,}595 kN.m$

$T_C = -3{,}507 kN.m$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, Diagrama de Momentos Fletores e Diagrama de Momentos Torçores para a haste BC:



Como na situação anterior, calcularemos as parcelas transferidas dos Momentos Fletores e Momentos Torsores.



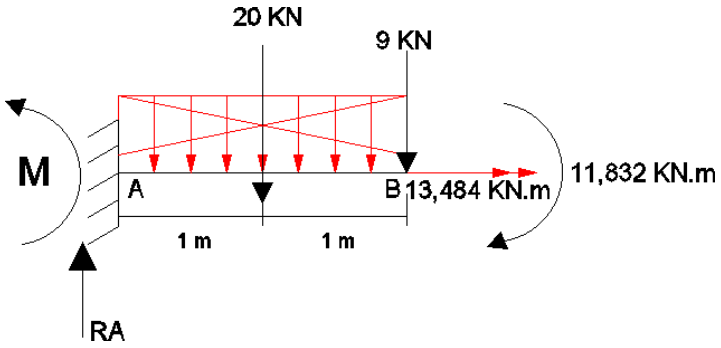
$T = -3{,}507 * \cos 60° + 17{,}595 + \cos 30°$

$T = 13{,}454\ \text{kN.m}$

$M_B = -3{,}507 * \text{sen}60° - 17{,}595 * \text{sen}30°$

$M_B = -11{,}832\text{kN.m}$

Agora transmitiremos as reações para a barra AB e calcularemos as reações no ponto A.



$\sum F_z = 0$

$R_A - 9 - 20 = 0$

$R_A = 29\ \text{kN}$

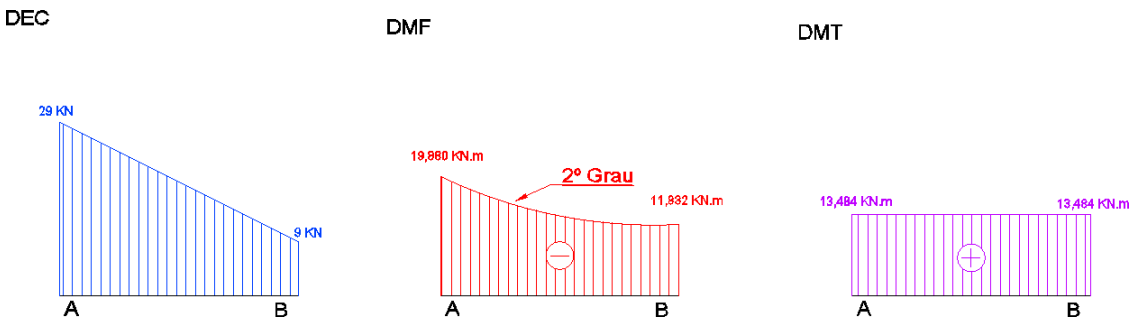
$\circlearrowleft^{+} \sum M_A = 0$

$M_A + 9 * 2 + 20 * 1 + 11{,}832 = 0$

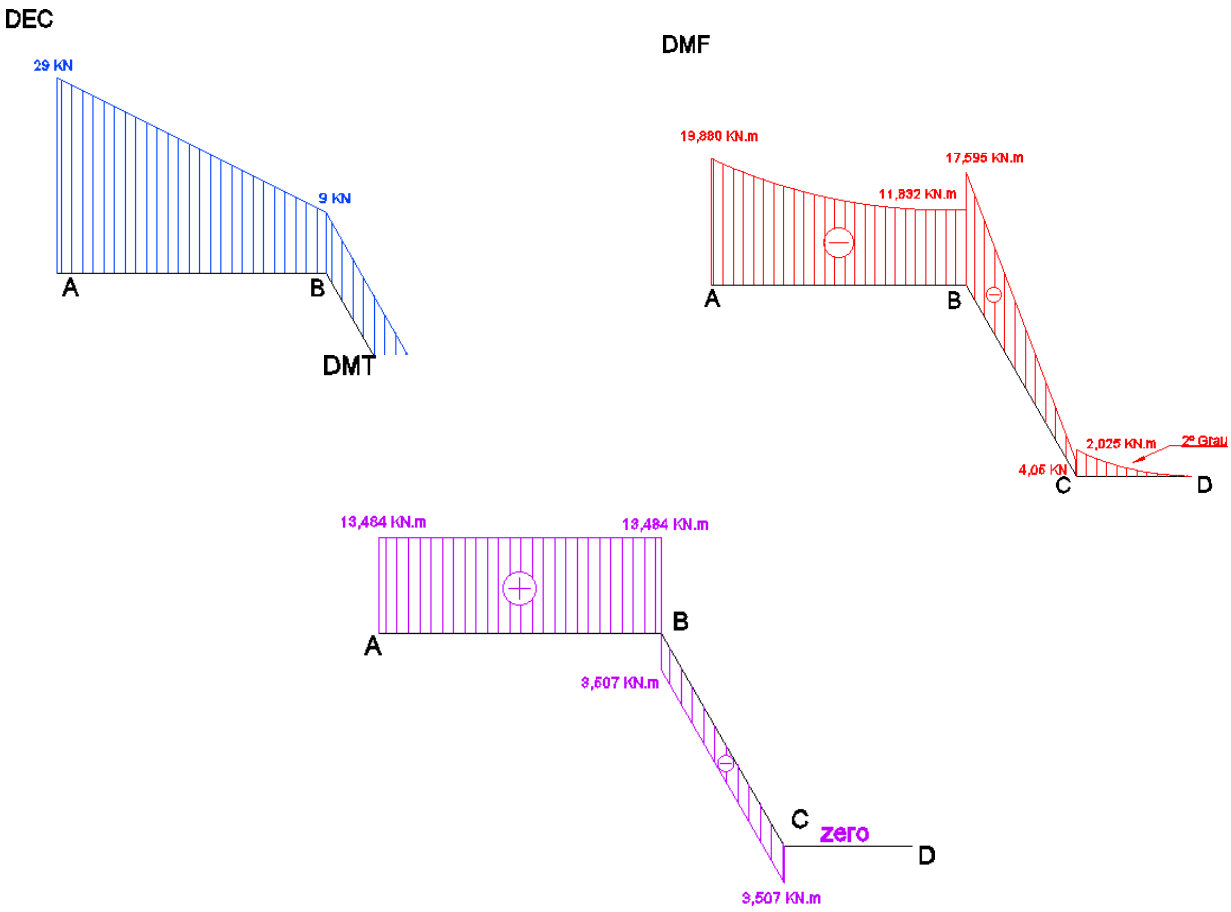
$M_A = -49{,}88\ \text{kN.m}$

$T_C = 13{,}484\ \text{kN.m}$

Traçando o Diagrama de Esforços Cortantes, Diagrama de Momentos Fletores e Diagrama de Momentos Torsores para a haste AB:

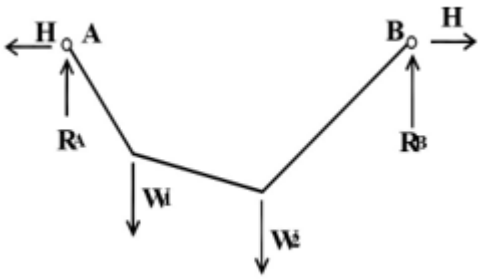


Agora, para fins didáticos, juntamos os diagramas:

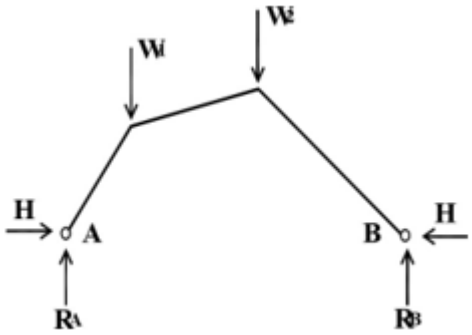


11. Arcos

Seja um cabo submetido a cargas concentradas cuja forma é um polígono.



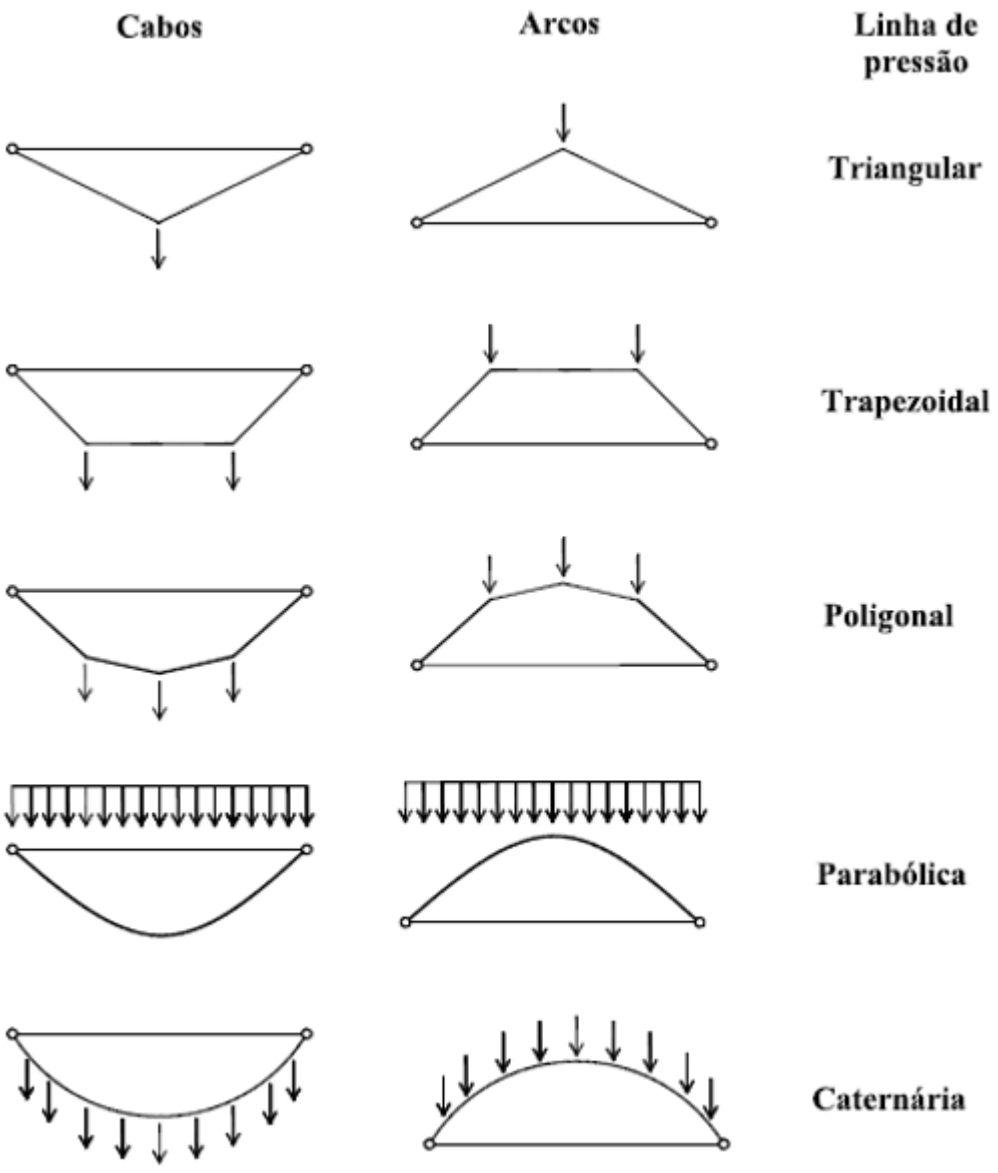
Rebate-se o cabo AB e mantém-se sua forma funicular “congelada” compatível com o arco de maneira que o cabo possua rigidez suficiente para resistir a esforços de compressão, similar ao comportamento de um arco.



A forma funicular “congelada” do cabo se transforma assim num **arco poligonal funicular**. Nos arcos, para cada tipo e intensidade de carregamento existirá uma forma funicular para a qual os momentos serão nulos para todas as seções transversais. Esta forma funicular é chamada “**linha de pressão**” de um carregamento sempre que a geometria de um arco coincidir com a linha de pressão do carregamento aplicado sobre o arco os únicos esforços atuantes serão de compressão, com $M_S=0$ e $V_S=0$. Além disso, independente do arco estar submetido exclusivamente a esforços de compressão ou não, os empuxos

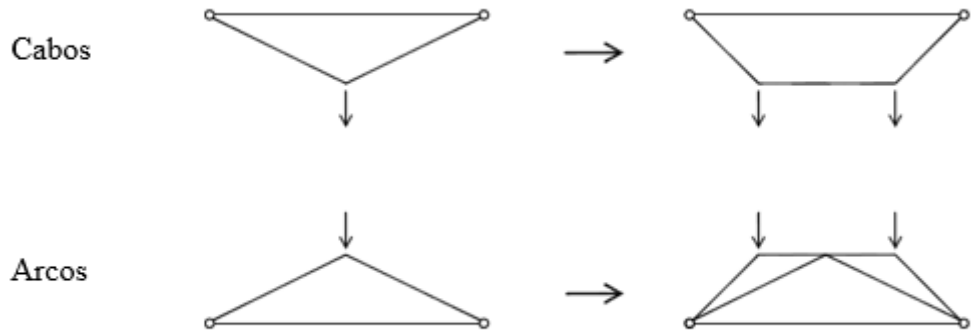
horizontais nas extremidades do arco têm sentido de aproximação das extremidades equilibrando a tendência do arco deformar- se com o afastamento dos apoios.

Formas funiculares para alguns tipos de carregamentos:



Portanto, muitas das características dos cabos também são pertinentes aos arcos, principalmente dos arcos com geometria funiculares (M_S=0).

Porém, o comportamento dos arcos difere do comportamento dos cabos em um aspecto básico: se o carregamento no cabo se modifica, o cabo muda de forma e assume uma nova geometria funicular. Por outro lado, se o carregamento no arco se altera, o arco mantém sua geometria, devido a sua maior rigidez ao compará-lo ao cabo, e não possui mais uma forma funicular para a nova condição de carregamento.



A geometria triangular não coincide com a linha de pressão para 2 cargas concentradas.

Quando a geometria do arco não coincide com a linha de pressão para o carregamento, surgem esforços de flexão e cisalhamento no arco (M_S,V_S), além dos esforços de compressão (N_S).

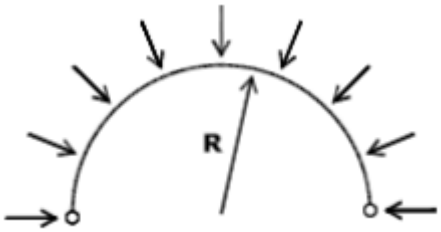
Ao projetar-se a forma de um arco, sob o ponto de vista estrutural, deve ser escolhida a forma funicular para o carregamento aplicado. No entanto, sabe-se que as estruturas estão submetidas a carregamentos permanentes (peso próprio) e a carregamentos variáveis (pessoas, mobiliário, ventos).

Para qual combinação de carregamentos definiremos a geometria do arco? Se definirmos somente em função do carregamento permanente haverá efeitos de flexão quando aplicado o carregamento variável. Se a geometria do arco for definida com o conjunto de carga permanente + variável, para qualquer alteração no carregamento variável ocorrerão efeitos de flexão e cisalhamento.

O critério de projeto utilizado neste caso é definir a geometria do arco para o carregamento predominante. Na situação de um arco de alvenaria, o carregamento permanente é maior que o variável e a geometria é definida em função do primeiro. No caso de arcos com materiais mais leves, como o aço, as cargas variáveis possuem maior participação na composição do carregamento, recomendando que a escolha da geometria do arco considere a sobreposição do carregamento permanente + variável.

Sabe-se que a otimização do elemento sob o ponto de vista estrutural não é o único parâmetro a influir na concepção de uma estrutura. A função e a forma também influenciam a escolha da forma estrutural do arco.

Os romanos notabilizaram-se pela utilização de arcos para vencer grandes vãos. Os arcos romanos possuem a forma de um semicírculo.



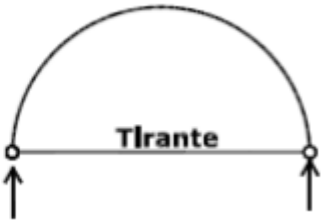
O carregamento que possui o semicírculo como a linha de pressão é a ação de cargas radiais. Esse tipo de carregamento surge quando há efeitos de vento envolvendo uma cobertura com estrutura em arco, por exemplo. Na maioria dos casos, o carregamento será do tipo uniformemente distribuído, o que ocasiona surgimento de efeitos de flexão nos arcos romanos. É o predomínio da forma sobre a função estrutural.

Outro tipo de arco bastante utilizado no passado é o arco gótico, que possui uma flecha bastante pronunciada.

Lembrando-se do elenco de cabos, quanto maior a flecha, menor a reação horizontal (empuxo) nos apoios. Nos arcos vale a mesma reação. Os arcos góticos possuem a vantagem de minimizarem as reações horizontais, permitindo vencer grandes vãos sem a preocupação de surgirem altos empuxos.

Já o arco árabe não possui vantagens sob o ponto de vista estrutural, pois as formas reentrantes nos apoios introduzem altas tensões de flexão nesta região

Além da escolha da geometria do arco, é necessário que também seja garantido que o empuxo horizontal nos apoios seja absorvido pela fundação.

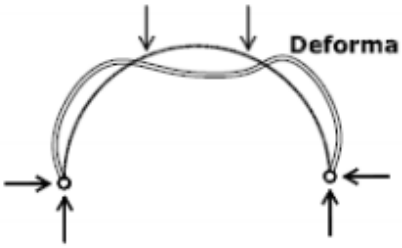


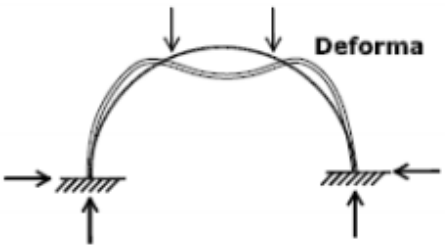
Caso a fundação não seja capaz de resistir ao empuxo, pode-se optar pela utilização de um tirante que impedirá o movimento de “afastamento” dos apoios. O inconveniente de usar o tirante está que este pode vir a ocupar um espaço que deveria estar liberado para a utilização. A solução neste caso é colocar o tirante no nível das fundações, de forma que fique no subsolo da edificação. Há situações onde é possível tirar partido da utilização de tirantes.

No caso de pontes, os sistemas em arco podem apresentar duas configurações diferentes, conforme a posição relativa do tabuleiro da ponte esteja acima ou abaixo do arco.

- Se o tabuleiro está acima do arco, as cargas do tabuleiro são transmitidas por montantes até ao arco e o empuxo horizontal é transmitido às fundações.
- Se o tabuleiro está abaixo do arco, as cargas estão “penduradas” no arco por pendurais. O equilíbrio dos empuxos horizontais pode ser garantido pelo uso de tirantes que estejam embutidos no tabuleiro.

Quanto à vinculação, os arcos podem apresentar extremidades rotuladas ou engastadas:





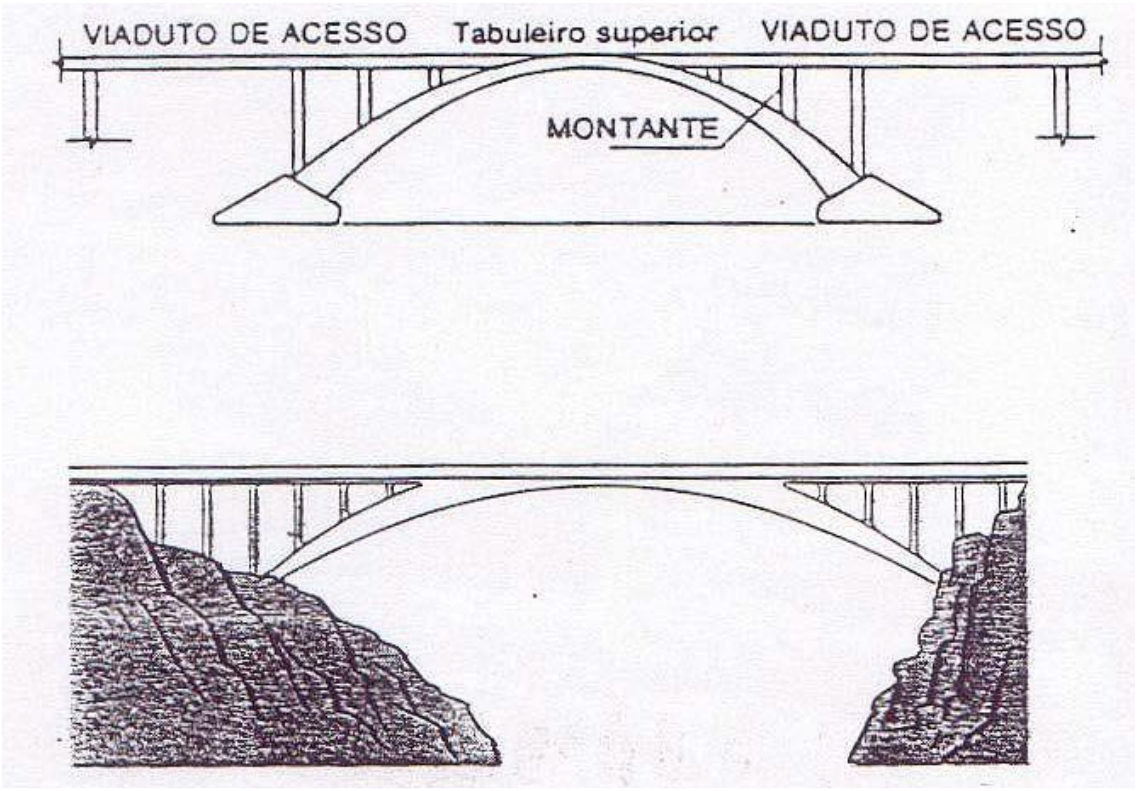
Os arcos com apoios rotulados permitem a rotação nas extremidades quando o carregamento atuar.

Os arcos com vínculos engastados são mais rígidos que os de extremidade rotulada, apresentando menores deslocamentos quando sob a ação do carregamento. Por serem mais rígidos, adaptam-se menos às variações de carregamento ao longo da vida da estrutura, surgindo assim esforços solicitantes mais elevados que nos pórticos rotulados.

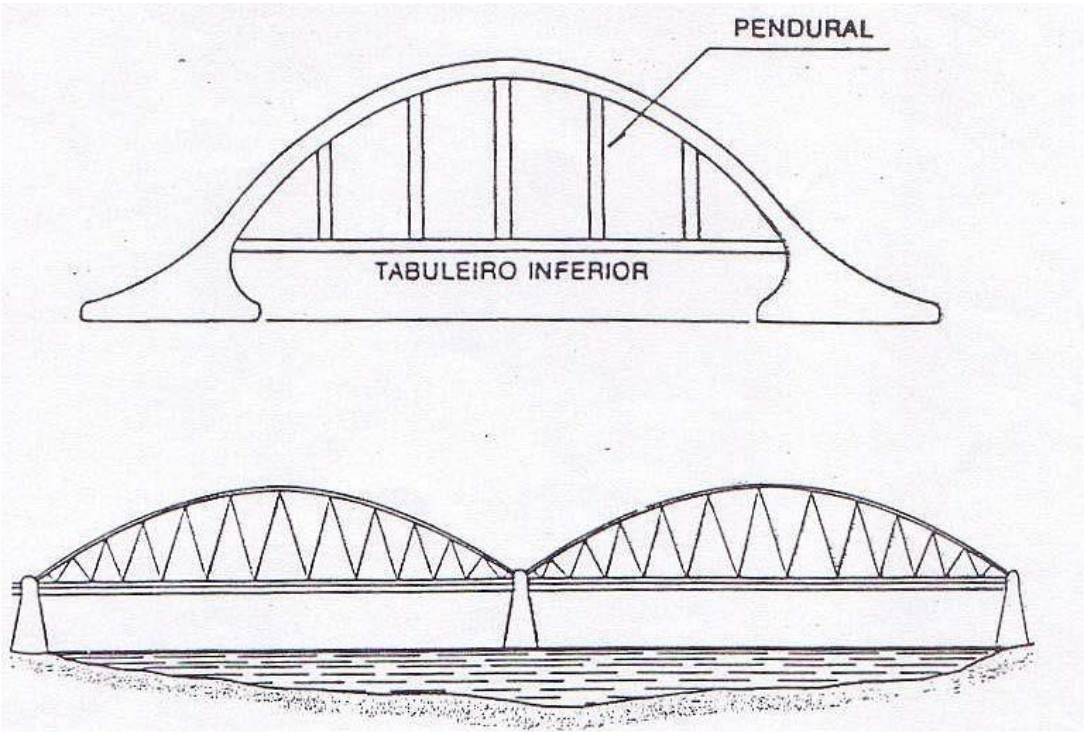
Os arcos hiperestáticos por dependerem de uma condição adicional de compatibilidade das deformações, além das equações de equilíbrio, sofrem alterações significativas nos esforços quando há recalques de apoios ou variações de temperatura. Para eliminar estes efeitos, pode-se acrescentar uma rótula ao arco biarticulado.

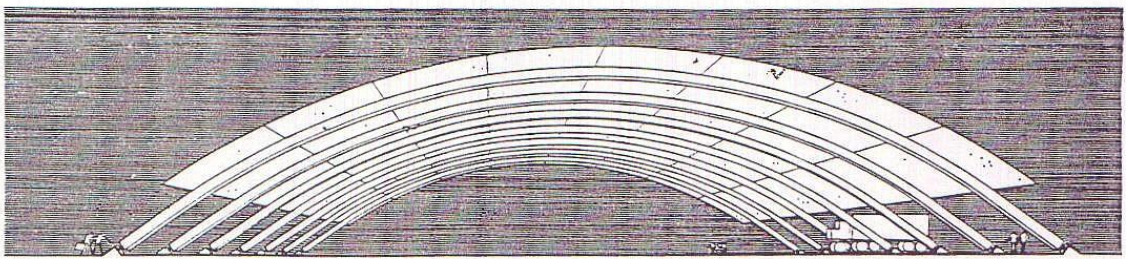
Arcos aplicados em engenharia:

Arcos com tabuleiro superior:

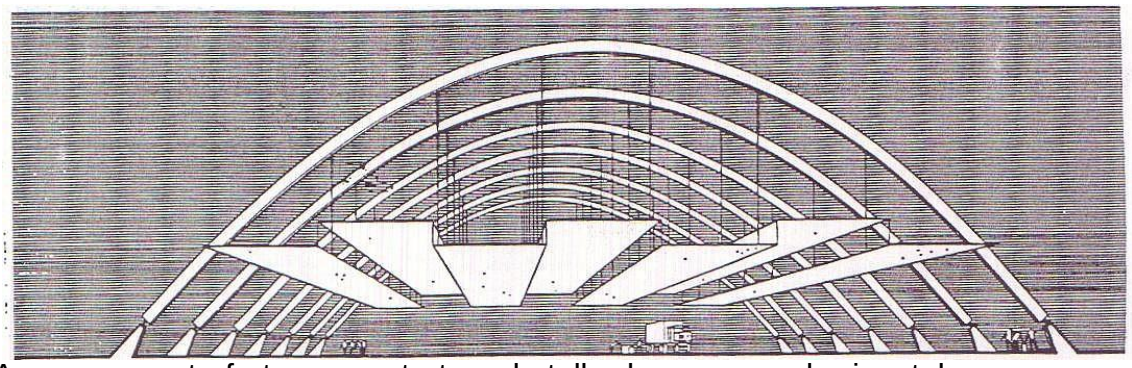


Arcos com tabuleiro inferior

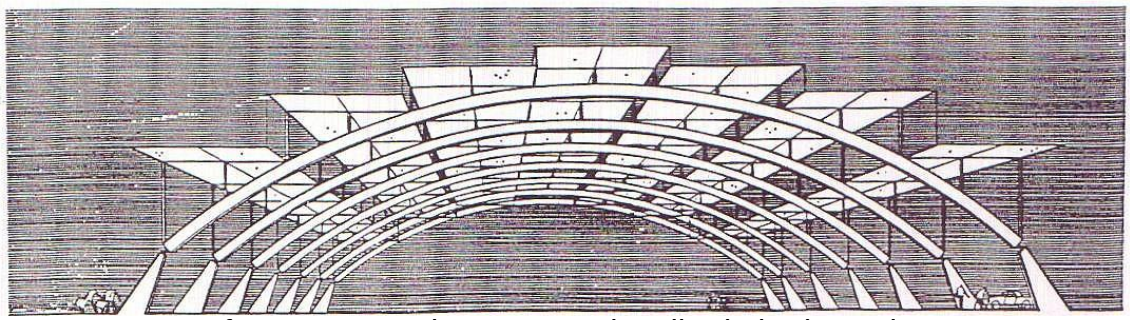




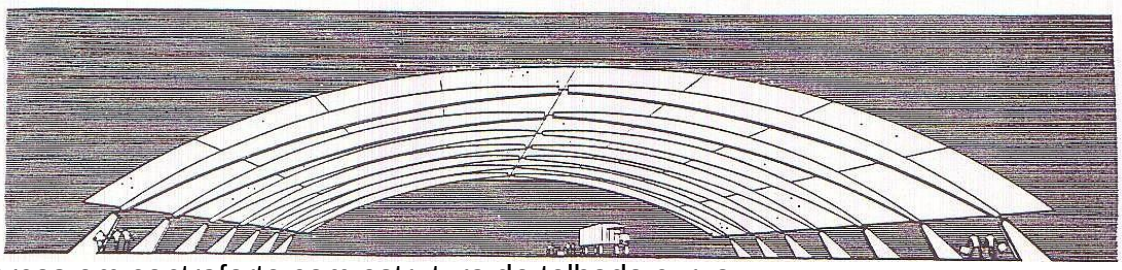
Arcos de fundação com estruturas de teto curvo.
Curva funicular: catenária.
Altura do arco: 1/5 do vão



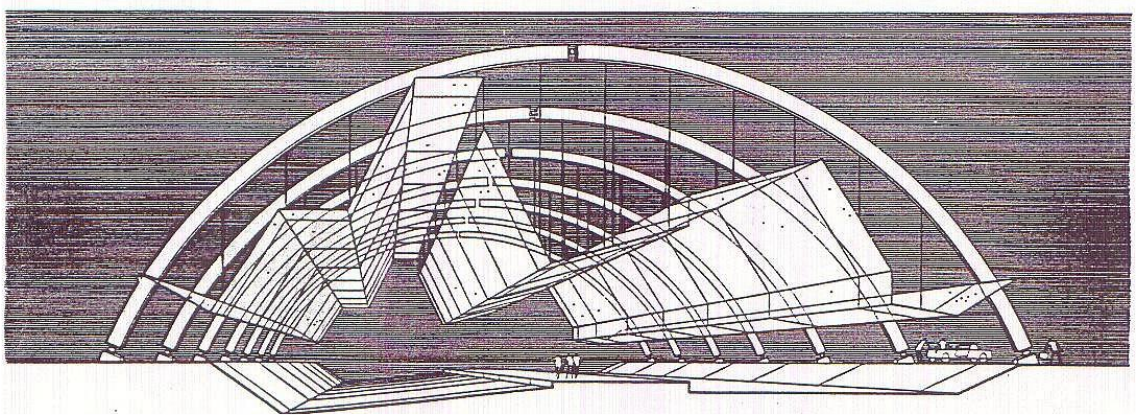
Arcos em contraforte com estrutura de telhado suspenso horizontal.
Curva funicular: polígono parabólico.
Altura do arco: 1/3 do vão.



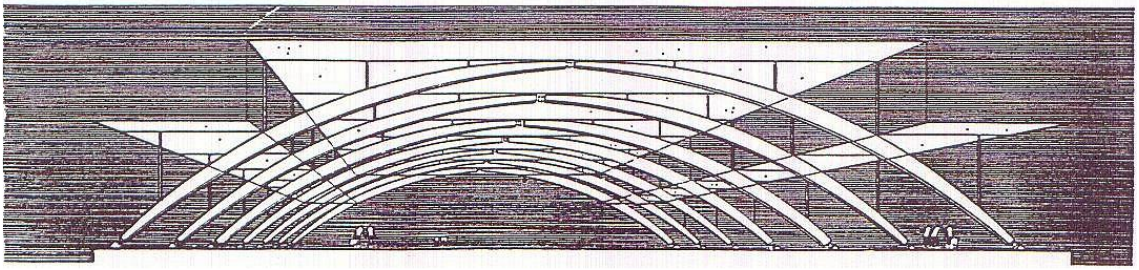
Arcos em contraforte suportando estrutura de telhado horizontal.
Curva funicular: polígono parabólico.
Altura do arco: 1/5 do vão.



Arcos em contraforte com estrutura de telhado curvo.
Curva funicular: catenária.
Altura do arco: 1/7 do vão.



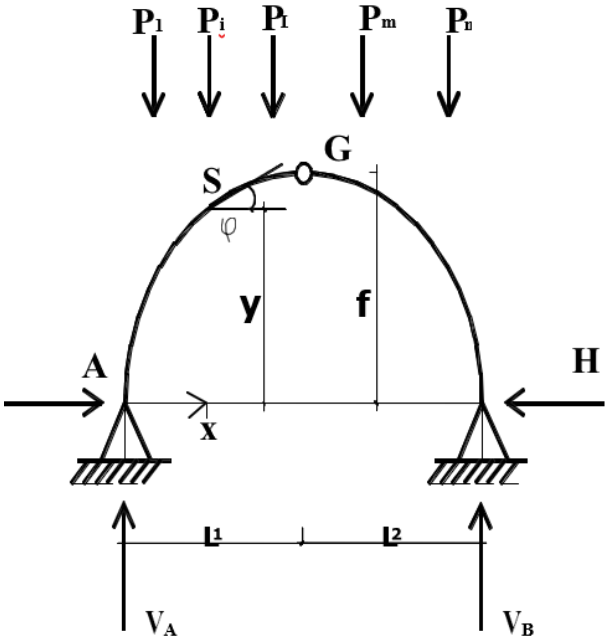
Arcos de fundação segmentados com estrutura de telhado de forma irregular.
Curva funicular: polígono irregular.
Altura do arco: 1/3 do vão



Arcos de fundação suportando estrutura de telhado horizontal.
Curva funicular: polígono parabólico.
Altura do arco: 1/5 do vão.

Arcos Triarticulados

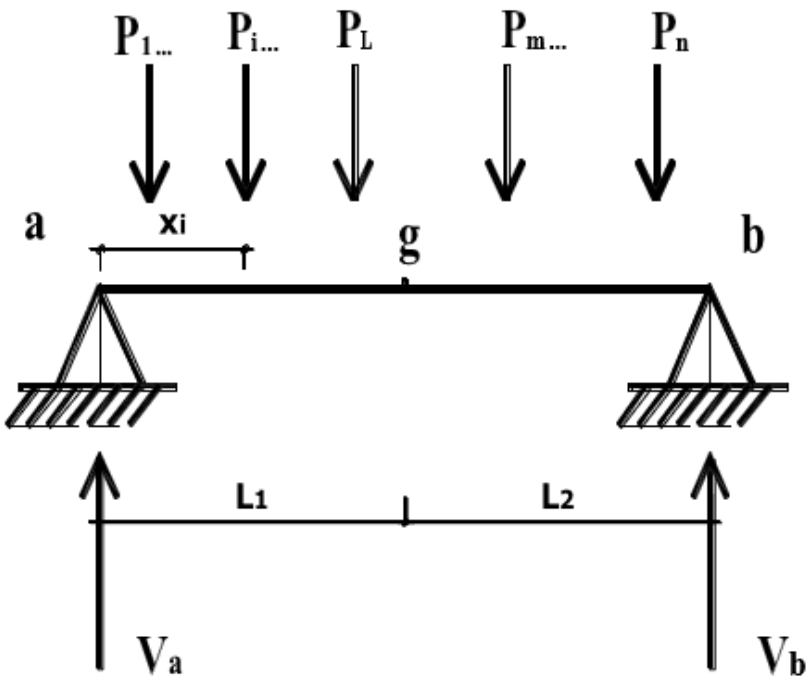
a) Cargas Verticais com Linha de Fechamento Horizontal



$L=L_1 + L_2$

f é a distância da Rótula até AB

Vigas de substituição



Cálculo das reações no apoio:

$$\sum F_X = 0$$
$$H_A = H_B = H \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0$$
$$L \cdot V_B = \sum P_i x_i$$
$$V_B = \sum P_i x_i / 1 \quad (2)$$

$$\sum F_Y = 0$$
$$V_A + V_B = \sum P_i$$
$$V_A = \sum P_i - V_B \quad (3)$$

Percebe-se que $V_B = V_b^*$

Também observa-se que $V_A = V_a^*$

$\sum M_{G_{esq}} = 0$ (Momento Fletor na Rótula é nulo)

$V_A L_1 - H.f - P_1(L_1 - x_1) - P_2(L_1 - x_2) \ldots = 0$ ou

$V_A L_1 - H.f - \sum_{i=1}^{L} P_i(L_1 - x_i) = 0 \quad (4)$

Da viga de substituição, temos que:

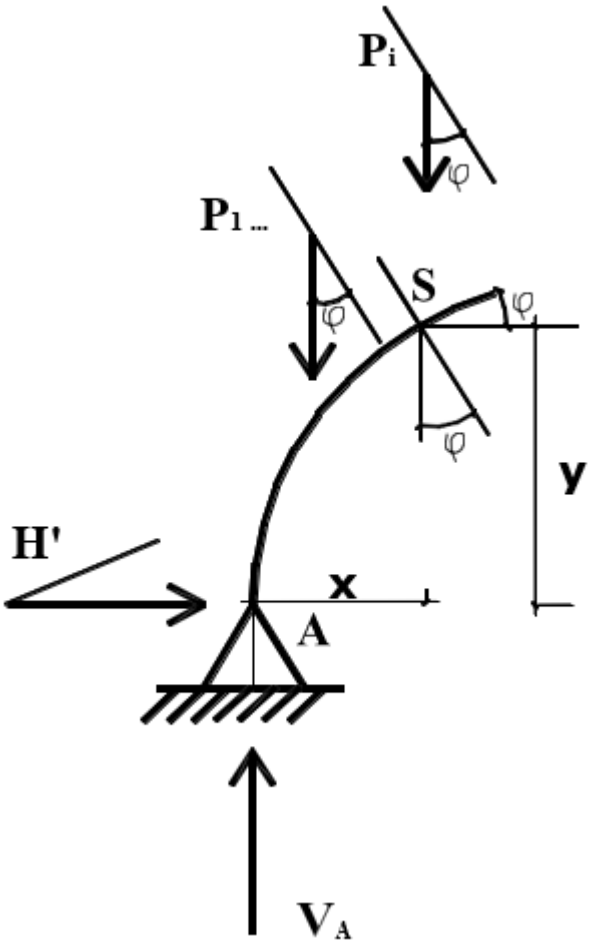
$$M_g^* = V_a^* L_1 - \sum_{i=1}^{L} P_i(L_1 - x_i)$$

Como $V_a^* = V_A \rightarrow$ Substituindo (5) em (4):

$$M_g^* - H \cdot f = 0$$

$$\mathbf{H = M_g^*/f}$$

Esforços Internos nos arcos - seção S (distante x de A)



$$V_S = \left(V_A - \sum_{i=1}^{i} P_i\right)\cos\varphi - H\sin\varphi$$

$$N_S = \left(-V_A + \sum_{i=1}^{i} P_i\right)\sin\varphi - H\cos\varphi$$

$$M_S = V_A x - \sum_{i=1}^{i} P_i(x - x_i) - H.y$$

Pela Viga de substituição:

$$V_S = V_S^{*}\cos\varphi - H\sin\varphi$$

$$N_S = -V_S^{*}\sin\varphi - H\cos\varphi$$

$$M_S = M_S^{*} - H.y$$

Onde φ encontra-se a partir de $y(x) = \tan\varphi = dy/dx$; sendo dada a curva y(x) que define o arco.

Quando o arco obedece a linha de pressão, temos que $M_S = 0$ e $V_S = 0$, logo:

$M_S = 0$

$y = M_S^{*}/H$

$V_S = 0$

$\tan\varphi = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = (1/H)dM_S^{*}/dx = (1/H)V_S^{*}$

$\tan\varphi = V_S^{*}/H$

$\varphi = \text{arctg}$

$V_S^{*} = H\tan\varphi$

$V_S = V_S^{*}\cos\varphi - H\sin\varphi$

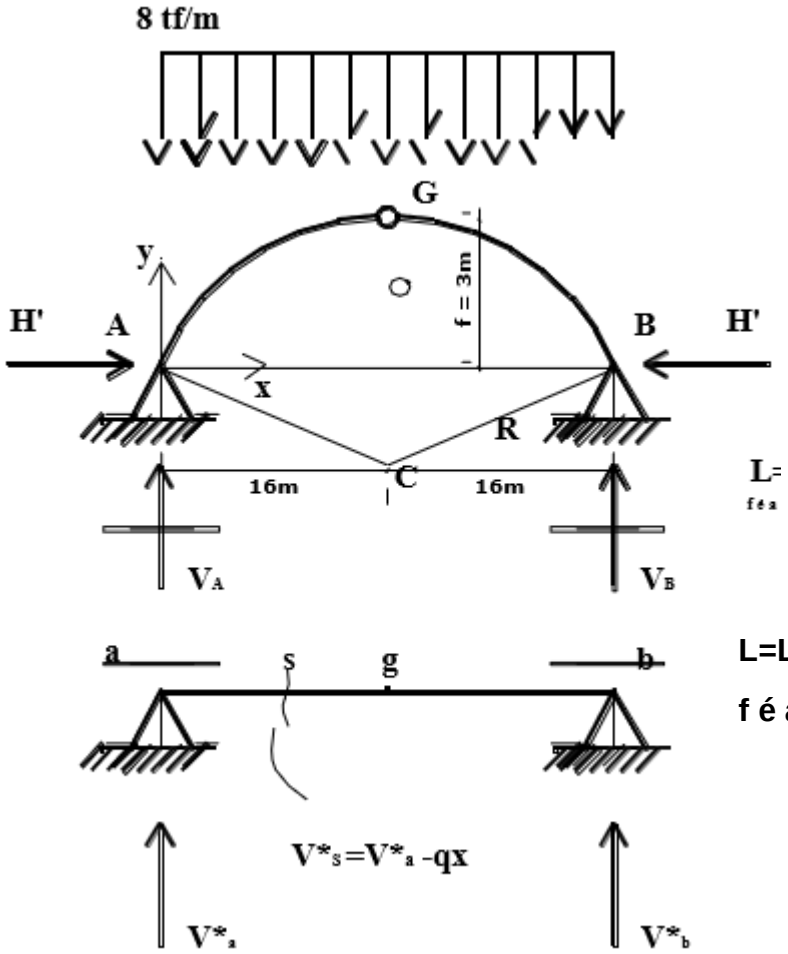
$V_S = H\tan\varphi\cos\varphi - H\sin\varphi$

$V_S = H(\sin\varphi/\cos\varphi)\cos\varphi - H\sin\varphi$

$V_S = 0$

$N_{S=\sqrt{(|V_S^{*}|+H^2)}}$

Exemplo: Encontrar Esforços Internos no Arco Circular para pontos de coordenadas x = 0, 4, 8, 12 e 16 m.



$L=L_1+L_2$

f é a dist. da curva AB

$$(\mathrm{R}-3)^2+16^2=\mathrm{R}^2$$

$$\mathrm{R}^2-6\mathrm{R}+9+256=\mathrm{R}^2$$

$$6\mathrm{R}=256+9$$

$$\mathrm{R}=44{,}17\ \mathrm{m}$$

Centro do Círculo:

$$\mathrm{a}=16\ \mathrm{m}$$
$$\mathrm{b}=-(\mathrm{R}-3)$$

Equação do Arco:

$$(x-16)+[y+(R-3)]^2=R^2$$

derivando em relação a x:

$$2(x-16)+[y+(R-3)]\,dy/dx=0$$

teremos que:

$$\tan\varphi=dy/dx=(16-x)/(y+R-3)$$

$$R=44{,}17\ m$$

Da viga de substituição obtemos:

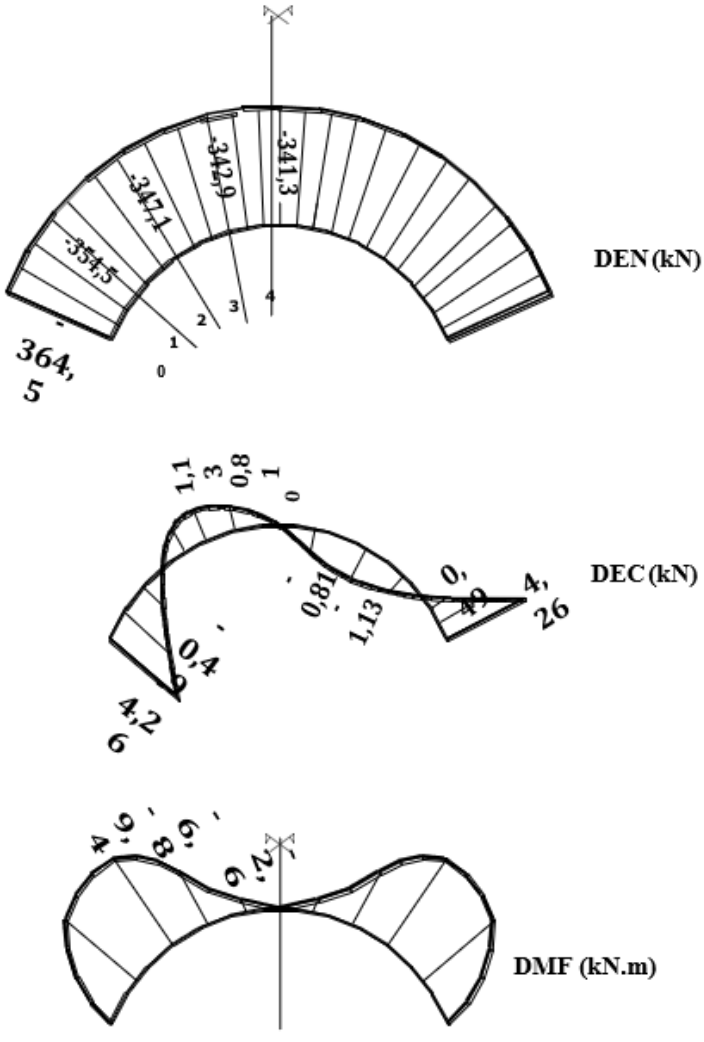
$$V_A = \frac{ql^2}{2} = \frac{8 \times 32}{2} = 128\ \text{kN}$$

$$M_g^* = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \times 32^2}{2} = 1024\ \text{kN.m}$$

$$H = M_g^*/f = \frac{1024}{3} = 341{,}33\ \text{kN}$$

$$M_S^* = V_A x - \frac{qx^2}{2}$$

Pontos	x	y	tan φ	φ	sin φ	cos φ	N_S	V_S	M_S
0	0	0	0,388	21,24º	0,362	0,932	- 364,5	- 4,3	0
1	4	1,34	0,283	15,96º	0,272	0,962	- 354,5	- 0,5	- 9,4
2	8	2,27	0,184	10,43º	0,181	0,983	- 347,1	1,1	- 6,8
3	12	2,82	0,091	5,20º	0,091	0,996	- 342,9	0,8	- 2,6
4	16	3,00	0	0º	0	1,0	- 341,3	0	0



Arco não obedece à linha de pressões.

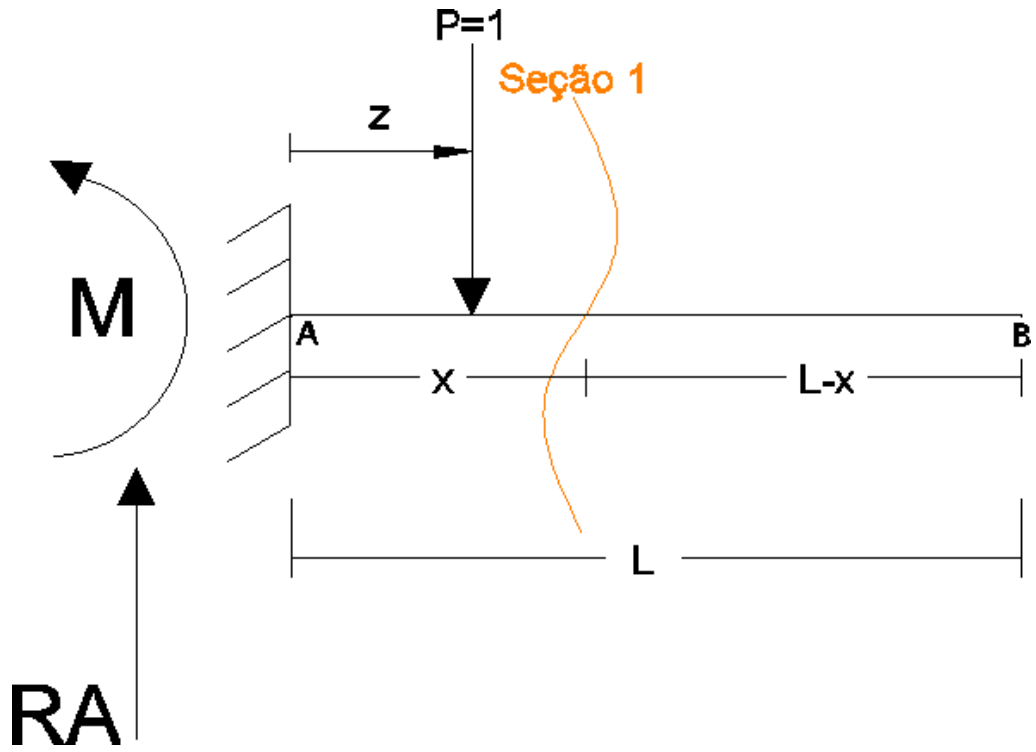
12. Linhas de Influência

Os diagramas vistos anteriormente eram nas situações onde o carregamento é fixo, neste capítulo estudaremos as linhas de influência que representam os esforços solicitantes de cargas móveis. Por definição, temos que as linhas de influência representam a variação de um esforço solicitante que se verifica em uma seção qualquer fixa da estrutura causada por uma carga concentrada **unitária móvel** (|P|=1).

Na engenharia a aplicação mais importante para as linhas de influência é em pontes, viadutos e passarelas.

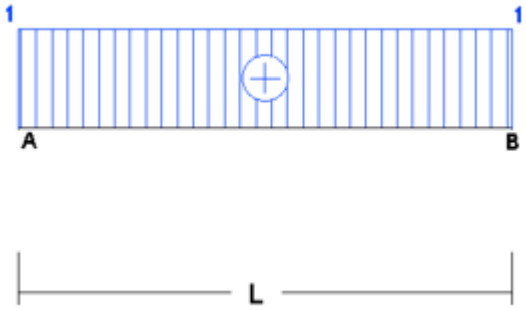
Para iniciarmos o estudo, verificaremos 4 situações básicas desta apostila que nos darão a teoria necessária para resolver os exercícios mais complexos, como foram os casos das outras disciplinas.

1° Situação – Viga em Balanço com Engaste à Esquerda



Primeiramente, vamos traçar a linha de influência na reação A, para isso, lembramos que é o valor da reação de acordo com a movimentação da carga, como é o caso de uma viga em balanço, o valor da reação em A será sempre constante, assim traçamos a LI de R_A.

LI de R_A



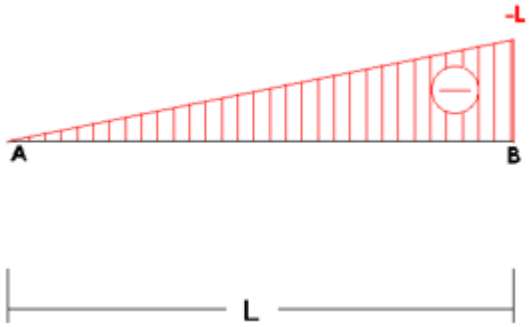
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - P = 0$$

$$R_A = P = 1$$

Para calcularmos a LI de MA, realizamos o cálculo de MA com o somatório dos momentos no ponto A, considerando que a carga P e possui valor em módulo 1 é móvel variando entre 0 ≤ z ≤ L.

LI de M_A



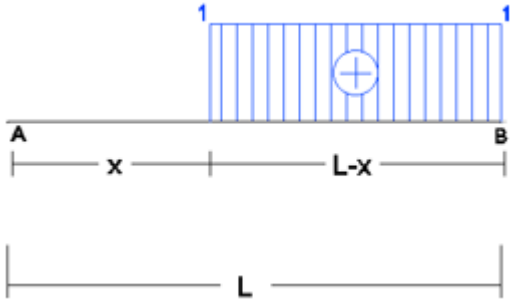
$$\sum M_A = 0$$
$$M_A + P \times z = 0$$
$$M_A = -P \times z$$

$$0 \leq z \leq L$$

$$z = 0$$
$$M_A = 0$$
$$z = L$$
$$M_A = -L$$

Agora calcularemos o cortante a partir da seção 1, verificamos que quando a carga está à esquerda da seção, entre a seção e o engaste, o valor do cortante será nulo, quando ela se encontra na direita, o valor do cortante será fixo no valor de P, neste caso é 1, sendo linear até o final da viga. Para uma melhor compreensão, é recomendado ao leitor comparar a situação com os diagramas, na situação onde a carga se encontra à direita e à esquerda da seção, podendo ser encontrado no capítulo 05 desta apostila.

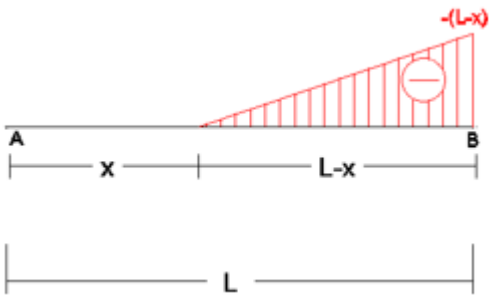
LI de V_S



$$0 \leq z \leq x$$
$$V_S = 0$$
$$x \leq z \leq L$$
$$V_S = +1$$

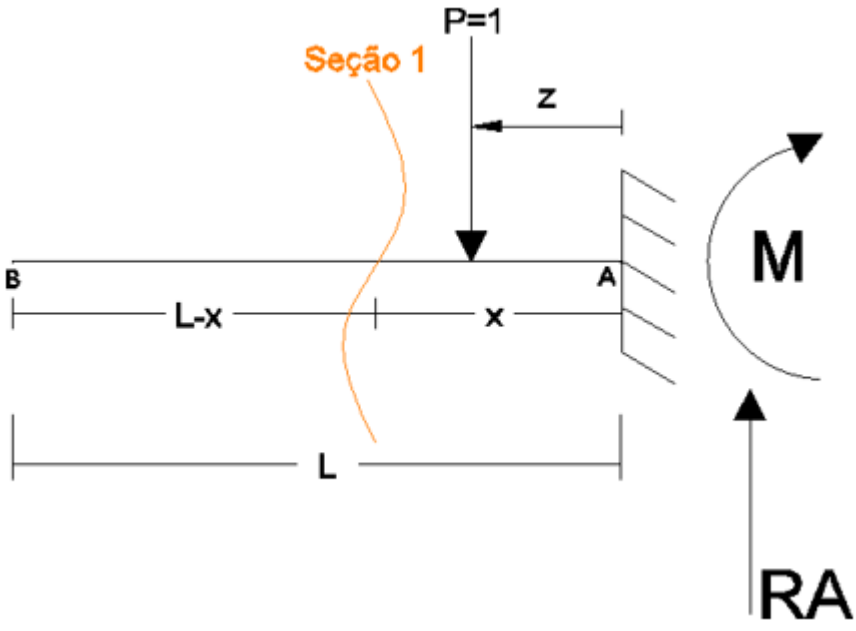
Por fim, traçaremos a linha de influência do momento na seção, como o caso anterior, entre o engaste e a seção o valor do momento será nulo, já a partir da seção, o momento irá variar de acordo com a equação descrita abaixo:

LI de M_S



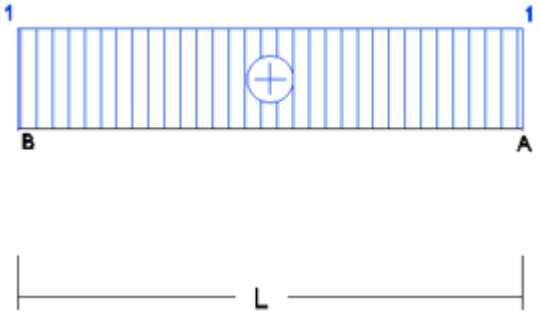
$$0 \leq z \leq x$$
$$M_S = 0$$
$$x \leq z \leq L$$
$$M_S = -P \times (z - x)$$
$$z = x$$
$$M_S = 0$$
$$z = L$$
$$M_S = -(L - x)$$

2° Situação – Viga em Balanço com Engaste à Direita



Para a linha de influência n areação A, teremos o mesmo caso da situação anterior:

LI de R_A



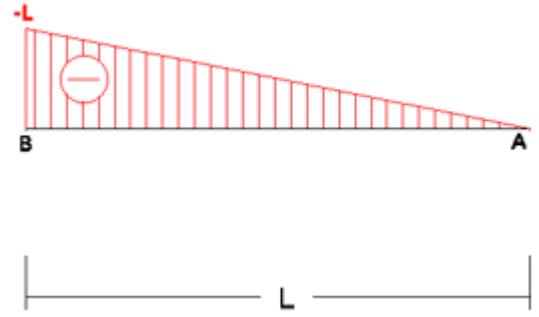
$$\sum F_x = 0$$

$$R_A - P = 0$$

$$R_A = P = 1$$

Para calcularmos a LI de MA, realizamos o cálculo de MA com o somatório dos momentos no ponto A, considerando que a carga P e possui valor em módulo 1 é móvel variando entre 0 ≤ z ≤ L, lembrando que agora o z percorre a direção da direita para esquerda.

LI de M_A



$$\sum M_A = 0$$

$$M_A + P \times z = 0$$

$$M_A + P \times z = 0$$

$$0 \leq z \leq L$$

$$z = 0$$

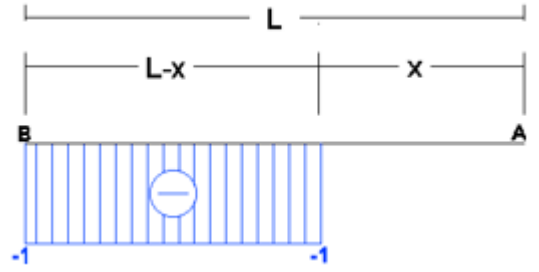
$$M_A = 0$$

$$z = L$$

$$M_A = -L$$

Agora calcularemos o cortante a partir da seção 1, verificamos que quando a carga está à direita da seção, entre a seção e o engaste, o valor do cortante será nulo, quando ela se encontra na esquerda, o valor do cortante será fixo no valor de P e como estamos variando da direita para a esquerda, de acordo com a convenção, o sinal do cortante será negativo.

LI de V_S



$$0 \leq z \leq x$$

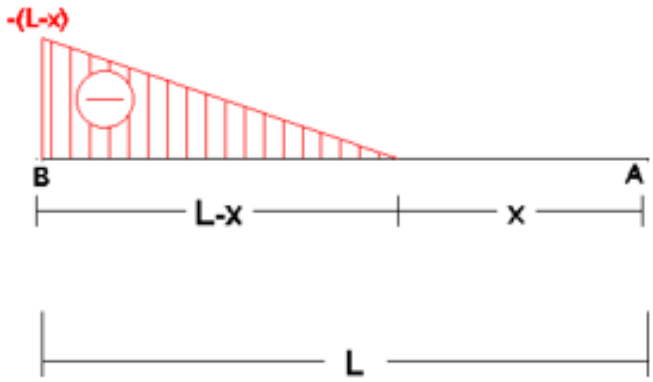
$$V_S = 0$$

$$x \leq z \leq L$$

$$V_S = -1$$

Por fim, traçaremos a linha de influência do momento na seção, entre o engaste e a seção o valor do momento será nulo, já a partir da seção, o momento irá variar de acordo com a equação descrita abaixo:

LI de M_S



$$0 \leq z \leq x$$

$$M_S = 0$$

$$x \leq z \leq L$$

$$M_S = -P \times (z - x)$$

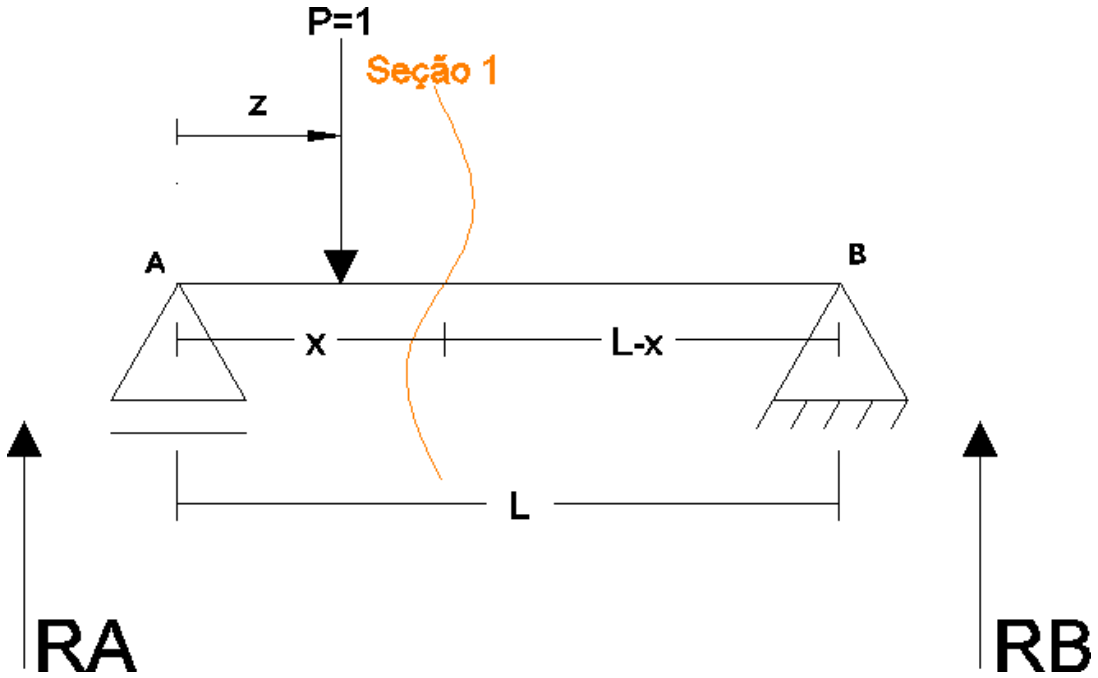
$$z = x$$

$$M_S = 0$$

$$z = L$$

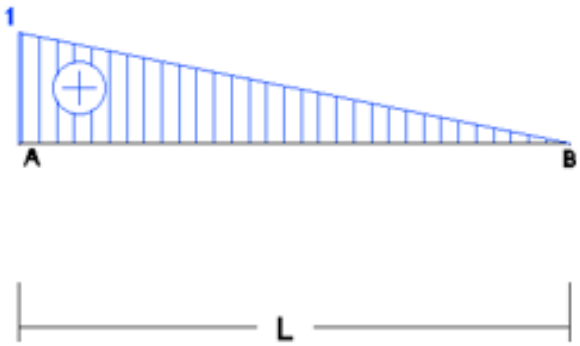
$$M_S = -(L - x)$$

3° Situação – Viga Bi Apoiada



Para traçar a linha de influência tanto de RA e RB, lembraremos da regra da sobreposição dos efeitos, visto anteriormente, onde a reação será dada pela multiplicação da carga com o vão até o outro apoio dividido pelo vão total entre os apoios.

LI de R_A



$$\sum M_B = 0$$

$$(R_A \times L) - [P \times (L - z)] = 0$$

$$R_A = \frac{[P \times (L - z)]}{L}$$

$$0 \leq z \leq L$$

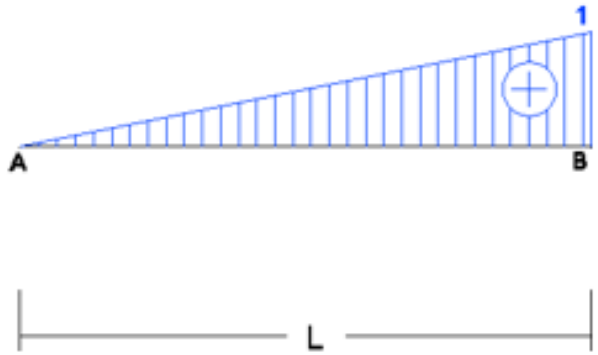
$$z = 0$$

$$R_A = 1$$

$$z = L$$

$$R_A = 0$$

LI de R_B



$$\sum M_A = 0$$

$$(R_B \times L) - (P \times z) = 0$$

$$R_B = \frac{P \times z}{L}$$

$$0 \leq z \leq L$$

$$z = 0$$

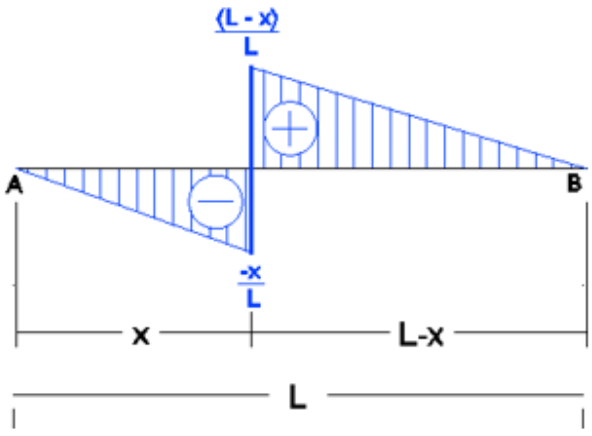
$$R_B = 0$$

$$z = L$$

$$R_B = 1$$

Agora, calcularemos o cortante da viga bi apoiada na seção 1, para isto, seguimos uma situação semelhante a utilizada para traçar os diagramas, enquanto a carga está entre 0 e x, o valor do cortante será o R_B, já quando está entre os valores de x e L, o valor do cortante será o próprio R_A, assim, traçamos a linha de influência:

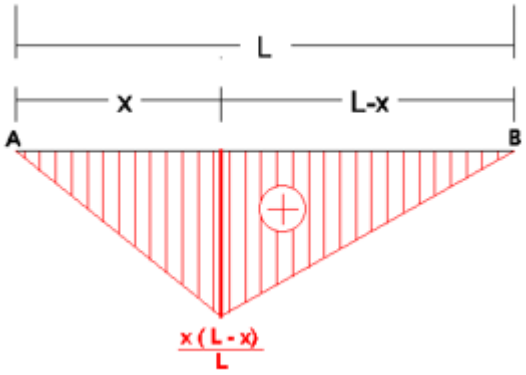
LI de V_S



$0 \leq z \leq x$	$x \leq z \leq L$
$R_B = z/L$	$R_A = (L - z)/L$
$V_S + R_B = 0$	$V_S - R_A = 0$
$V_S = -z/L$	$V_S = (L - z)/L$
$z = 0$	$z = x$
$V_S = 0$	$V_S = (L - x)/L$
$z = x$	$z = L$
$V_S = -x/L$	$V_S = 0$

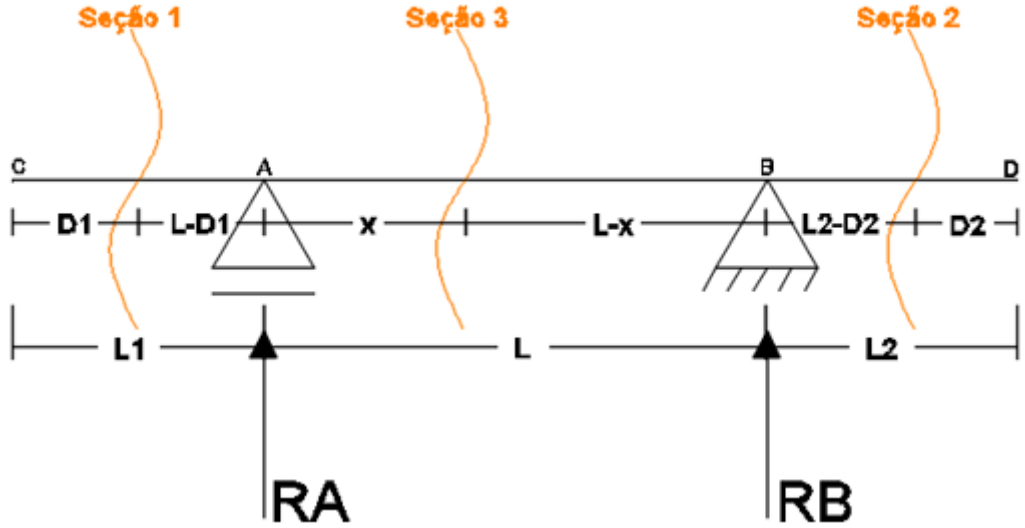
Por fim, calcularemos o momento na seção 1, variando entre 0 e x e depois variando entre x e L (antes e depois da seção):

LI de M_S



$0 \leq z \leq x$	$x \leq z \leq L$
$M_S - R_B \times (L - x) = 0$	$M_S - R_A \times x = 0$
$R_B = z/L$	$R_A = (L - x)/L$
$M_S = z/L \times (L - x)$	$M_S = \frac{(L - x)}{L} \times x$
$z = 0$	$z = x$
$M_S = 0$	$M_S = \frac{x}{L} \times (L - x)$
$z = L$	$z = L$
$M_S = x/L \times (L - x)$	$M_S = 0$

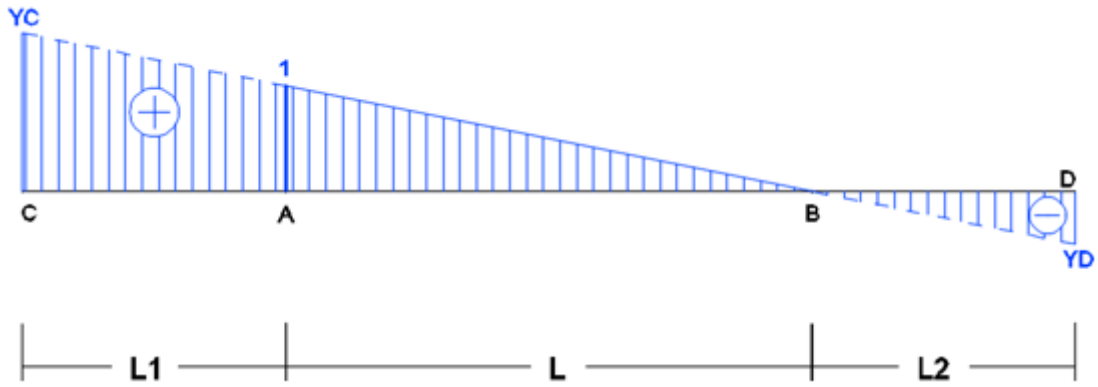
4ª Situação – Viga Simplesmente Apoiada em Balanço



Este caso seria a aplicação e junção das 3 situações vistas anteriormente, onde possui o balanço deve ser considerado para fins de cálculo a situação da viga engastada e entre os dois apoios é a 3º situação.

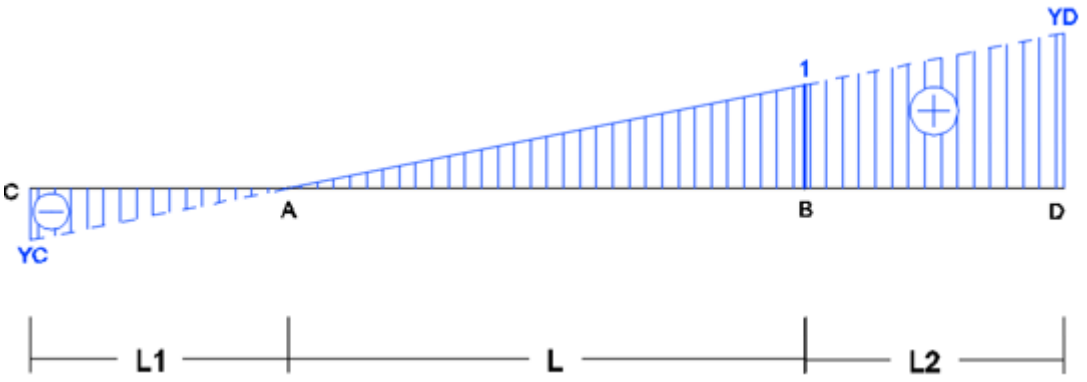
Primeiramente, calcularemos as reações em RA e RB, para isso, calculamos como sendo a situação 3, todavia, a reação deve se estender até o final da viga, seguindo a inclinação e utilizando a semelhança de triângulos obtemos a cota Y de cada inclinação.

LI de R_A



Cálculo de R_A:	Cálculo de Y_C:
$\sum M_B = 0$ $(R_A \times L) - [P \times (L - z)] = 0$ $R_A = \frac{[P \times (L - z)]}{L}$ $0 \leq z \leq L$ $z = 0$ $R_A = 1$ $z = L$ $R_A = 0$	$\frac{1}{L} = \frac{Y_C}{L_1}$ $Y_C = \frac{L_1}{L}$ Cálculo de Y_D: $\frac{1}{L} = -\frac{Y_D}{L_2}$ $Y_D = \frac{L_2}{L}$

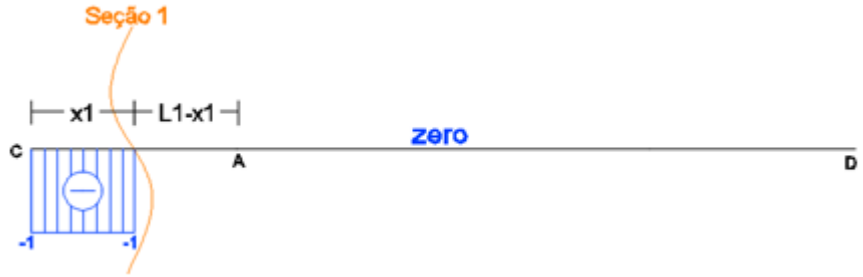
LI de R_B



Cálculo de R_B:	Cálculo de Y_C:
$\sum M_A = 0$ $(R_B \times L) - (P \times z) = 0$ $R_B = \frac{P \times z}{L}$ $0 \leq z \leq L$ $z = 0$ $R_B = 0$ $z = L$ $R_B = 1$	$\frac{1}{L} = -\frac{Y_C}{L_1}$ $Y_C = -\frac{L_1}{L}$ Cálculo de Y_D: $\frac{1}{L} = \frac{Y_D}{L_2}$ $Y_D = \frac{L_2}{L}$

Para as seções um e dois, trataremos o caso da viga engastada à direta e à esquerda, respectivamente. Seguindo o raciocínio da 2° situação, traçaremos a linha de influência do cortante e do momento fletor da reação A:

LI de V_{S1}



$0 \leq z \leq x_1$

$V_S = 0$

$x_1 \leq z \leq L_1$

$V_S = -1$

LI de M_{S1}

$0 \leq z \leq x_1$

$M_S = 0$

$x_1 \leq z \leq L_1$

$M_S = -P \times (z - x_1)$

$z = x_1$

$M_S = 0$

$z = L_1$

$M_S = -(L_1 - x_1)$

Seguindo o raciocínio da 1° situação, traçaremos a linha de influência do cortante e do momento fletor da reação A:

LI de V_{S2}:

$$0 \leq z \leq x_2$$

$$V_S = 0$$

$$x_2 \leq z \leq L_2$$

$$V_S = +1$$

LI de M_{S2}:

$$0 \leq z \leq x_2$$

$$M_S = 0$$

$$x_2 \leq z \leq L_2$$

$$M_S = -P \times (z - x_2)$$

$$z = x_2$$

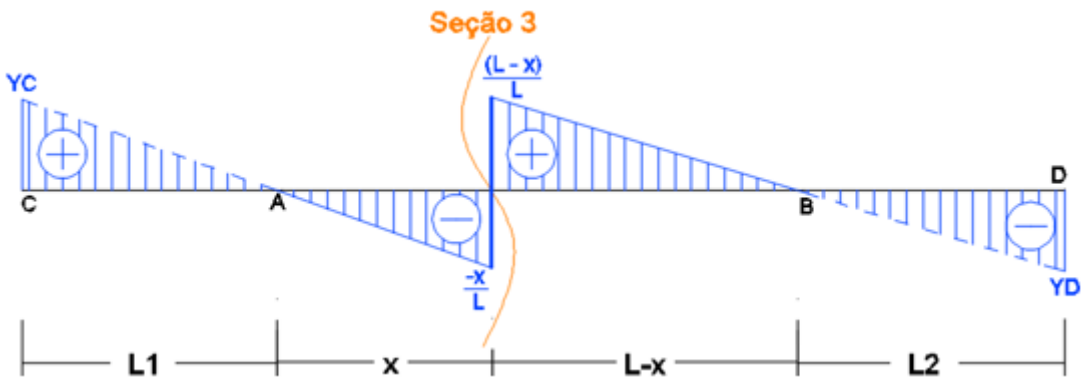
$$M_S = 0$$

$$z = L_2$$

$$M_S = -(L_2 - x_2)$$

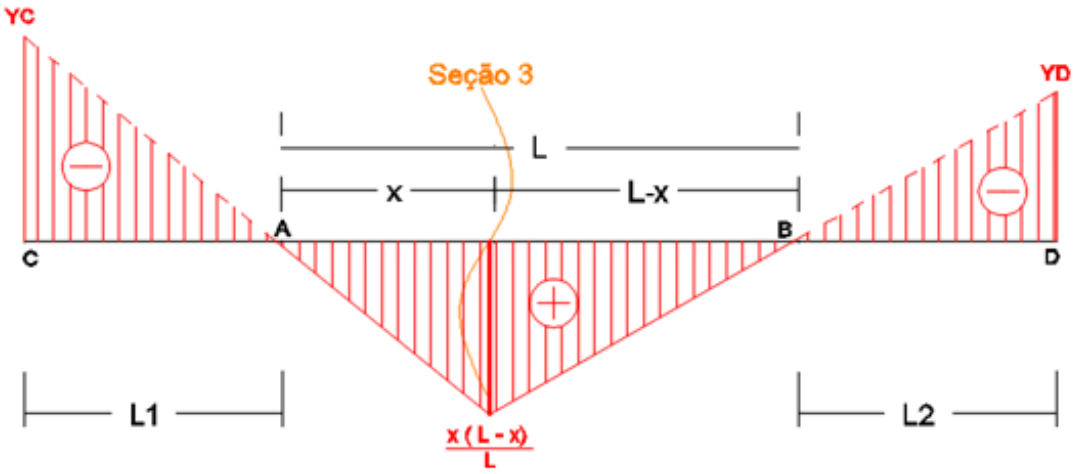
Agora praticaremos a 3° situação para calcularmos o esforço cortante e o momento fletor da seção 3.

LI de V_{S3}:



$0 \le z \le x$ $R_B = \frac{z}{L}$ $V_S + R_B = 0$ $V_S = -\frac{z}{L}$ $z = 0$ $V_S = 0$ $z = x$ $V_S = -\frac{x}{L}$	$x \le z \le L$ $R_A = \frac{(L-z)}{L}$ $V_S - R_A = 0$ $V_S = \frac{(L-z)}{L}$ $z = x$ $V_S = \frac{(L-x)}{L}$ $z = L$ $V_S = 0$	Cálculo de Y_C: $\frac{x/L}{x} = \frac{Y_C}{L_1}$ $Y_C = \frac{L_1}{L}$ Cálculo de Y_D: $\frac{(L-x)/L}{(L-x)} = \frac{Y_D}{L_2}$ $Y_D = \frac{L_2}{L}$

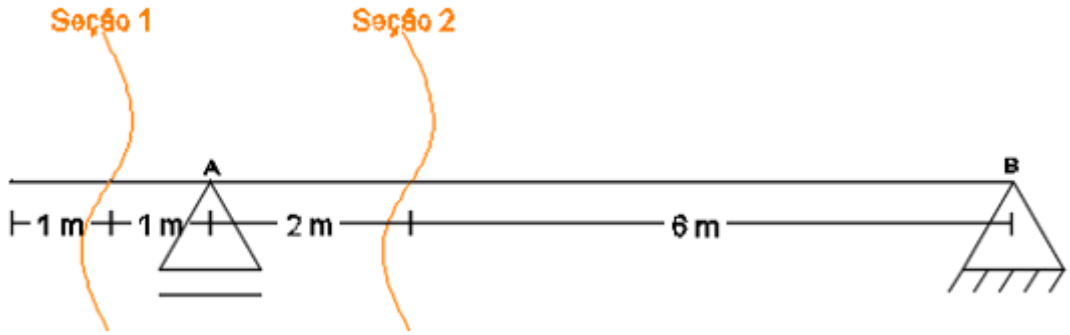
LI de M_{S3}:



$0 \le z \le x$ $M_S - R_B \times (L-x) = 0$ $R_B = \frac{z}{L}$ $M_S = \frac{z}{L} \times (L-x)$ $z = 0$ $M_S = 0$ $z = L$ $M_S = \frac{x}{L} \times (L-x)$	$x \le z \le L$ $M_S - R_A \times x = 0$ $R_A = \frac{(L-x)}{L}$ $M_S = \frac{(L-x)}{L} \times x$ $z = x$ $M_S = \frac{x}{L} \times (L-x)$ $z = L$ $M_S = 0$	Cálculo de Y_C: $\frac{\frac{x}{L} \times (L-x)}{x} = \frac{Y_C}{L_1}$ $Y_C = \frac{L_1}{L}$ Cálculo de Y_D: $\frac{\frac{(L-x)}{L}}{(L-x)} = \frac{Y_D}{L_2}$ $Y_D = \frac{L_2}{L}$

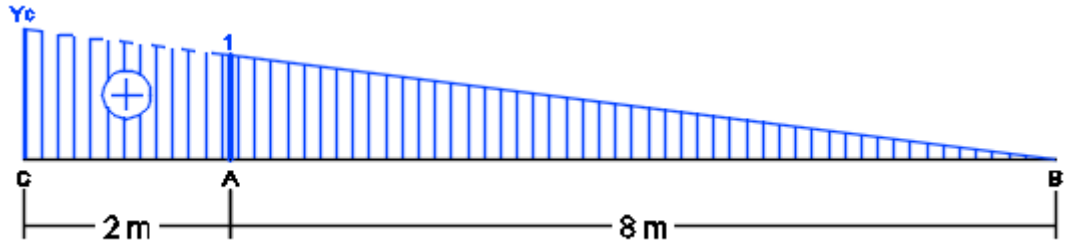
Exemplo:

1) Trace a Linha de Influência da viga abaixo indicando R_A, R_B, M_{S1}, M_{S2}, V_{S1} e V_{S2}.



Primeiramente, calcularemos as reações em A e em B através da situação 3 – viga bi apoiada – e estendendo-se seguindo a inclinação, assim encontraremos as ordenadas através da semelhança de triângulos.

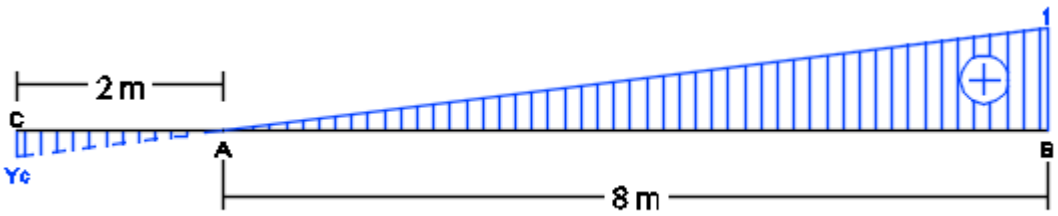
LI de R_A



$$\frac{1}{8} = \frac{Y_C}{10}$$

$$Y_C = 1{,}25$$

LI de R_B

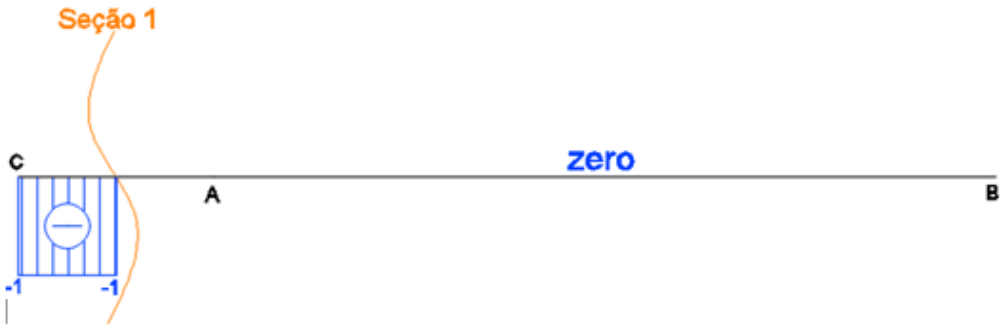


$$\frac{1}{8} = -\frac{Y_C}{2}$$

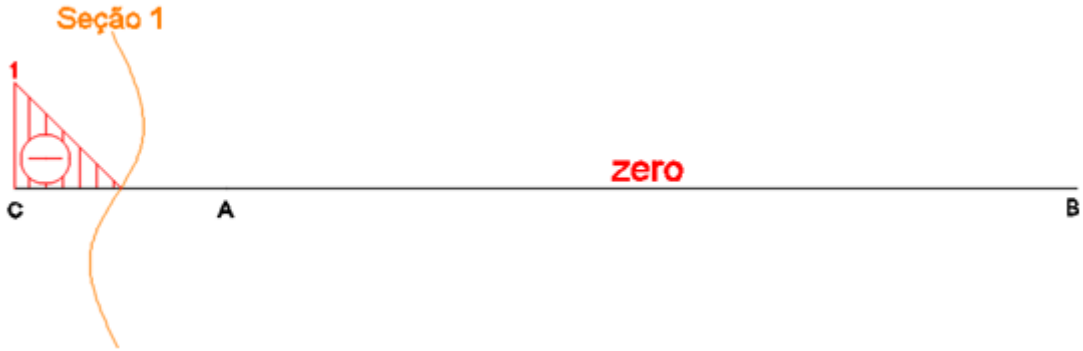
$$Y_C = -0{,}25$$

Agora será realizado o cálculo da linha de influência das seções. Iniciando pela seção 1, verificamos que se trata do caso de uma viga em balanço com engaste à direita, portanto, a LI se restringe apenas ao trecho, sendo zero no restante da estrutura.

LI de V_{S1}

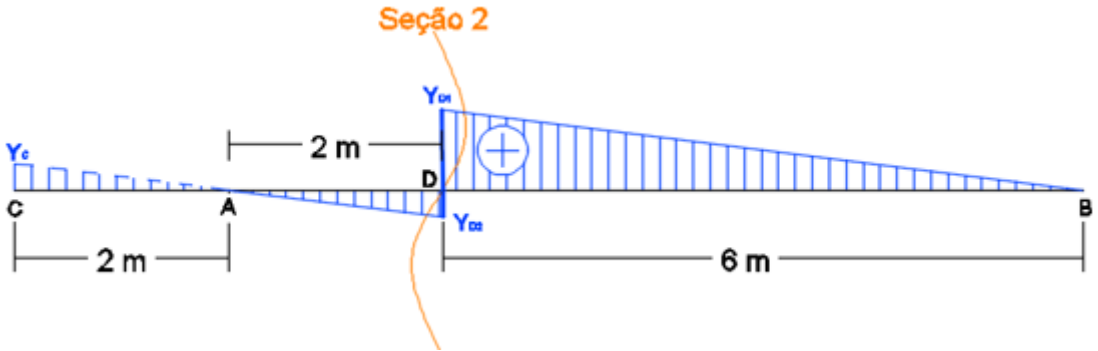


LI de M_{S1}



Por fim, traçaremos a linha de influência da seção 2. Neste caso, trata-se da situação 3, o esforço cortante e momento fletor de uma viga bi apoiada, calcularemos entre o trecho A e B, logo após estenderemos seguindo a inclinação e encontraremos o valor da ordenada no ponto, no balanço.

LI de V_{S2}



$$Y_{D1} = \frac{6}{2+6}$$

$$Y_{D1} = 0{,}75$$

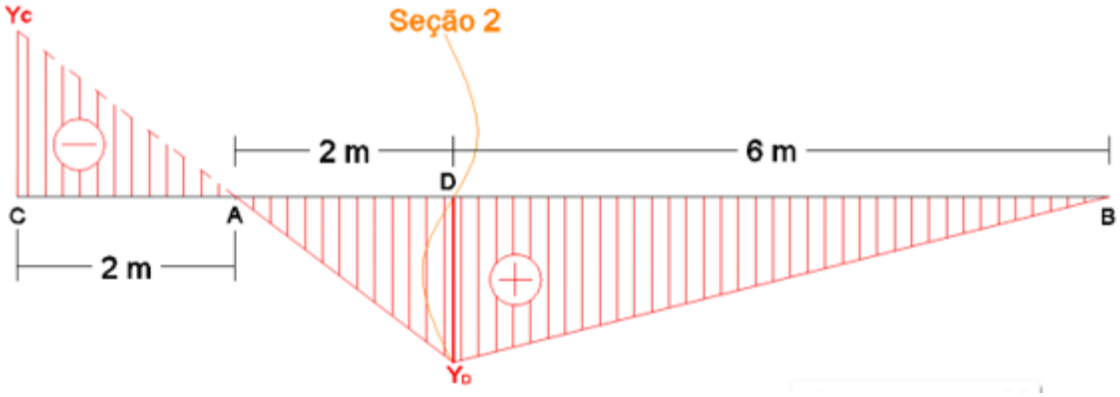
$$Y_{D2} = -\frac{2}{2+6}$$

$$Y_{D2} = -0{,}25$$

$$\frac{Y_C}{2} = \frac{0{,}25}{2}$$

$$Y_C = 0{,}25$$

LI de M_{S2}



$$Y_D = -\frac{2 \times 6}{2 + 6}$$

$$Y_D = -1{,}50$$

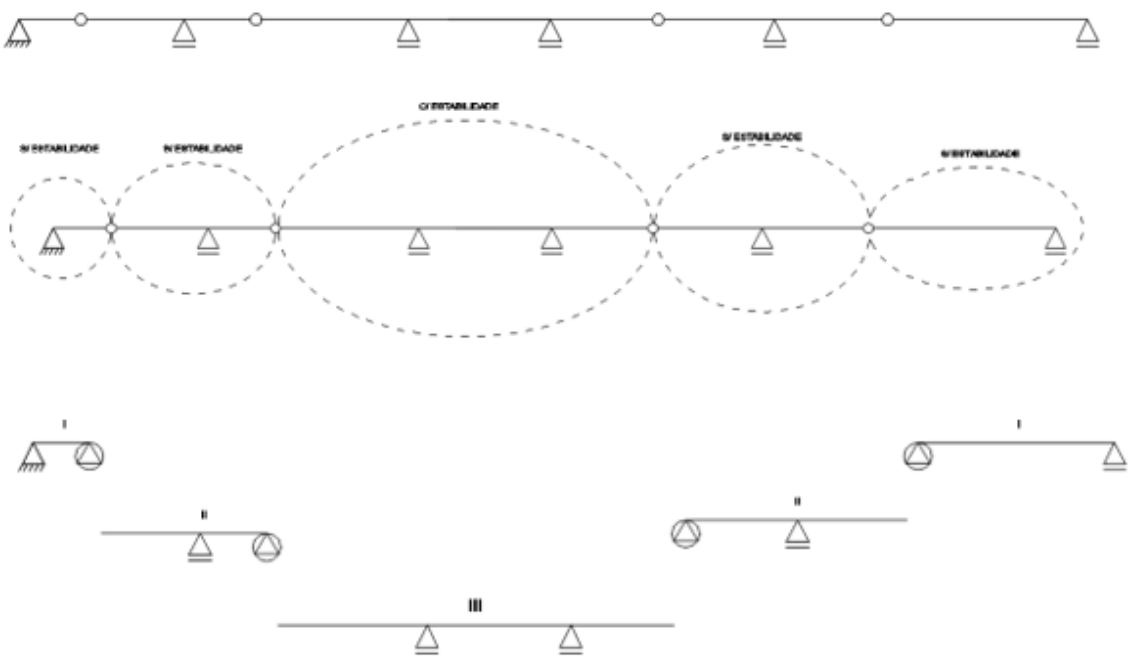
$$\frac{Y_C}{2} = \frac{1{,}50}{2}$$

$$Y_C = 1{,}50$$

Linha de Influência em Viga Gerber

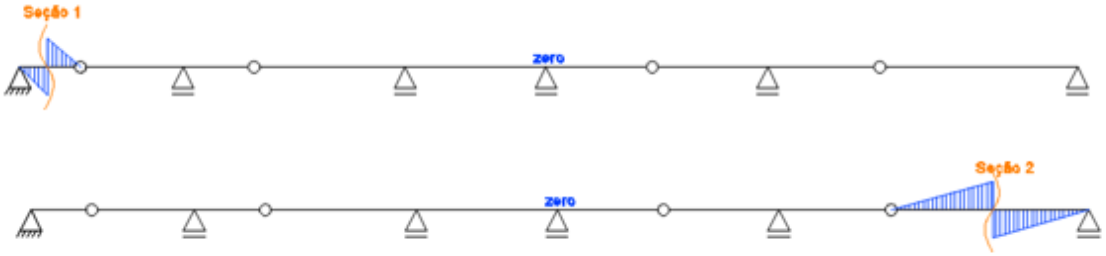
As vigas gerber, como já visto anteriormente, são vigas geralmente extensas com rótulas internas convenientemente dispostas, formando os dentes gerber. Quanto ao estudo das linhas de influência em vigas gerber recairá em carregamentos indiretos.

Os trechos com e sem estabilidade própria serão cruciais para verificar onde os esforços serão restritos ou prolongados aos demais trechos. O primeiro



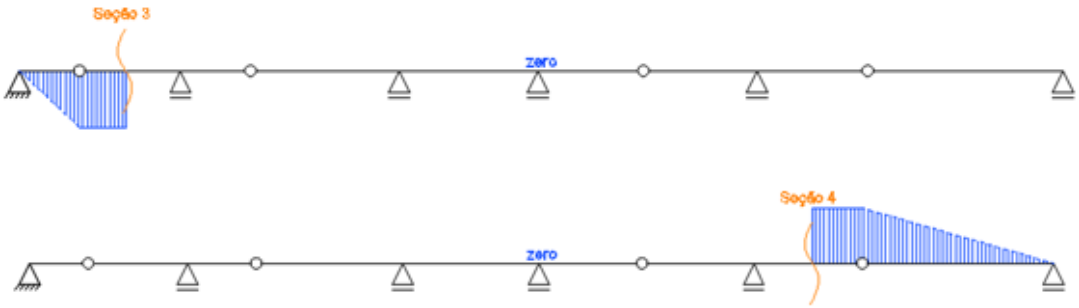
passo para a resolução é decompor a viga gerber em trechos com e sem estabilidade própria já vista anteriormente, e determinar a hierarquia entre estes.

Se a seção ou apoio estiver em um trecho sem estabilidade própria e for de ordem I a Linha de Influência se restringirá apenas a este trecho, por exemplo, traçamos a linha de influência de VS1 com a seção 1 no primeiro trecho, frisando que devemos considerar a rótula interna como um apoio, portanto se enquadraria à terceira situação.

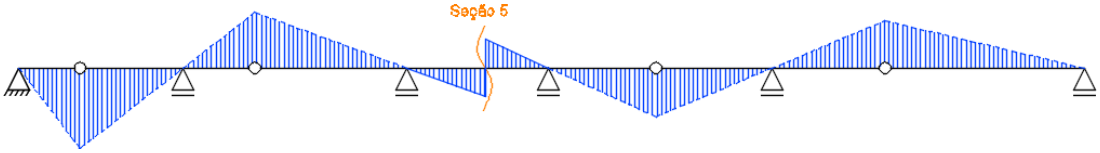


Caso a seção pertença a um trecho sem estabilidade própria e for de ordem diferente de I, a Linha de Influência se propagará até o trecho de ordem I, todavia não se propagará no trecho de ordem maior. Neste caso, as duas vigas que possuem ordem II irão se propagar ao trecho de ordem I e irá se restringir. Para facilitar a visualização, a linha de influência apenas irá prolongar-se para os trechos da parte superior da decomposição.

Caso a seção ou seções pertença a um trecho sem estabilidade própria: a LI se restringe a este trecho. Se houver outros trechos sem estabilidade própria afeitos ao trecho em questão, a LI se estenderá aos trechos afeitos.

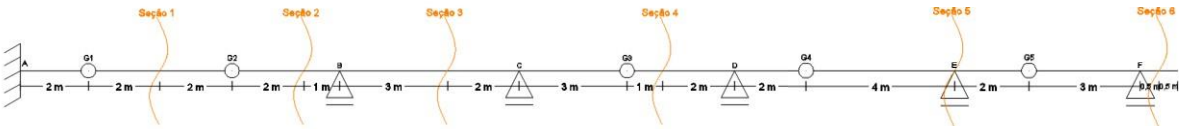


Já na situação onde a seção pertença a um trecho com estabilidade própria, a Linha de Influência se prolongará até o final dos trechos sem estabilidade própria afeitos ao trecho com estabilidade própria.

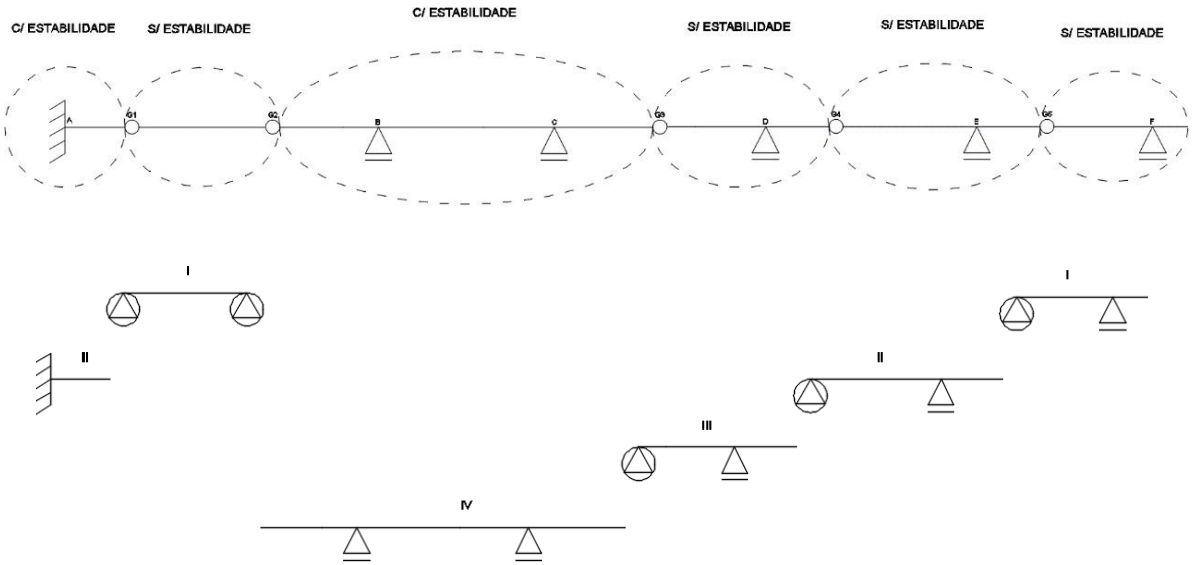


Exemplo:

1) Trace as Linhas de Influência do Cortante e Momento Fletor das reações e seções indicadas abaixo.



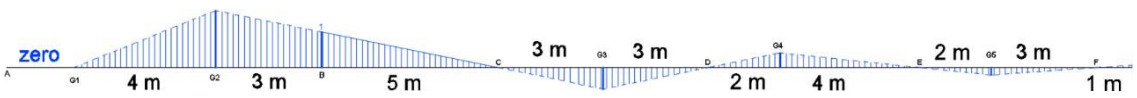
Para iniciarmos este exercício, iremos decompor os trechos com e sem estabilidade própria, lembrando que em alguns casos é possível mais de uma decomposição, todavia não altera o resultado final da linha de influência.



O próximo passo traçaremos a linha de influência das reações.

O trecho da reação em A possui estabilidade própria e é a situação 1 do engaste à esquerda. A LI irá prolongar-se nos trechos sem estabilidade própria até alcançar outro trecho com estabilidade própria, nesta situação a linha de influência irá finalizar-se na rótula G2.

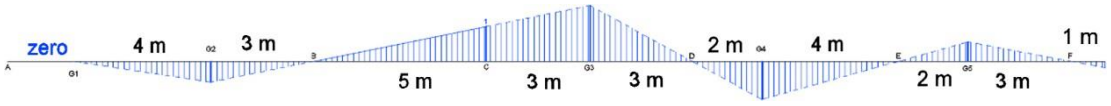
O trecho da reação em B, é a situação 3 da viga simplesmente apoiada, como o apoio pertence a um trecho com estabilidade própria, a linha de influência irá se prolongará até o final dos trechos sem estabilidade, nesta situação até o final da viga à direita e cessando na rótula G1. O cálculo das ordenadas é realizado através da semelhança de triângulos, assim temos:



$$Y_{G2} = 1{,}6$$
$$Y_{G3} = -0{,}6$$

$$Y_{G4} = 0{,}4$$
$$Y_{G5} = 0{,}2$$

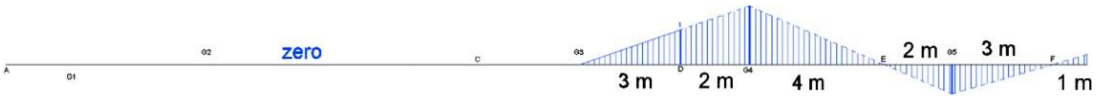
O trecho da reação em C, é a situação 3 da viga simplesmente apoiada, como o apoio pertence a um trecho com estabilidade própria, a linha de influência irá se prolongar até o final dos trechos sem estabilidade, nesta situação até o final da viga à direita e sessando na rótula G1. O cálculo das ordenadas é realizado através da semelhança de triângulos, assim temos:



$$Y_{G4} = -1{,}07$$
$$Y_{G5} = 0{,}535$$

$$Y_{G2} = -0{,}6$$
$$Y_{G3} = 1{,}6$$

A reação em D pertence a um trecho sem estabilidade própria e encaixa-se na situação 3 – viga bi apoiada. A LI **não** se prolongará aos trechos com estabilidade própria, todavia o trecho em que pertence a reação D é de ordem três, deste modo se prolongará até o trecho de ordem I.



$$Y_{G4} = 1{,}67$$
$$Y_{G5} = -0{,}83$$
$$Y_{Balanço} = 0{,}28$$

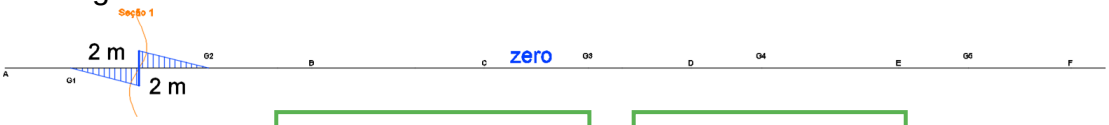
Quanto à reação em E, é o mesmo caso anterior, sendo que o trecho é de ordem II então prolongará até a ordem I.

$$Y_{G5} = 1{,}5$$
$$Y_{Balanço} = -0{,}5$$

Por fim, traçaremos a reação em F, terceira situação e que é de ordem I e não se prolongará para nenhum outro trecho.

$$Y_{Balanço} = 1{,}33$$

Agora, traçaremos os cortantes das reações. Para o cortante da seção 1, verificamos que se trata do cortante da viga bi apoiada e pertence a um trecho sem estabilidade própria próximos de dois trechos com estabilidade será restringido.



$$Y_{S1(dir)} = -\frac{2}{2+2}$$

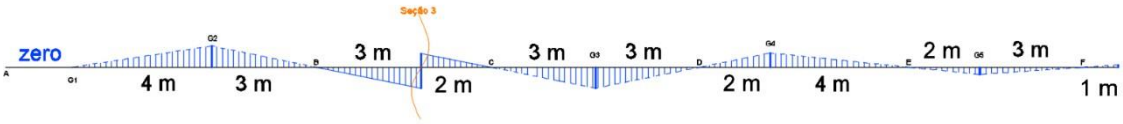
$$Y_{S1(dir)} = -0{,}50$$

$$Y_{S1(esq)} = \frac{2}{2+2}$$

$$Y_{S1(esq)} = 0{,}50$$

A seção 2 pertence à um trecho com estabilidade própria, sendo assim irá propagar-se aos trechos sem estabilidade. Contudo, é a situação da viga em balanço à direita resultando na seguinte linha de influência:

A seção 3 pertence a um trecho com estabilidade própria, situação da viga simplesmente apoiada. Deste modo se propagará até o final dos trechos sem estabilidade afeitos ao trecho com estabilidade própria.



$$Y_{S3(dir)} = -\frac{3}{2+3}$$

$$Y_{S3(dir)} = -0{,}60$$

$$Y_{S3(esq)} = \frac{2}{2+3}$$

$$Y_{S3} = 0{,}40$$

$$Y_{G2} = 0{,}60$$

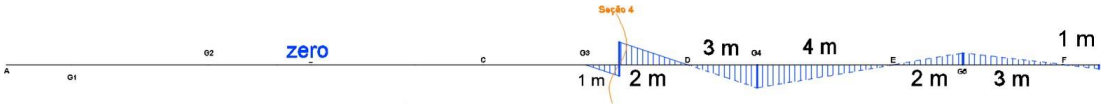
$$Y_{G3} = -0{,}60$$

$$Y_{G4} = 0{,}40$$

$$Y_{G5} = -0{,}20$$

$$Y_{Balanço} = 0{,}07$$

A seção de 4 está localizada em um trecho sem estabilidade própria de ordem III, sendo transmitido aos demais.



$$Y_{S3} = -\frac{1}{1+2}$$

$$Y_{S3} = -0{,}33$$

$$Y_{S3(esq)} = \frac{2}{1+2}$$

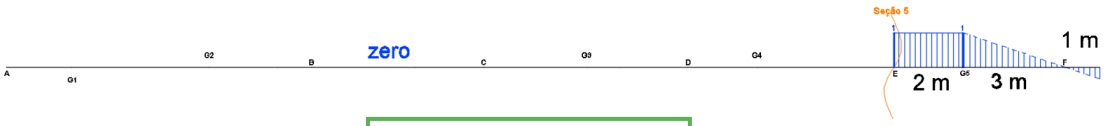
$$Y_{S3(esq)} = 0{,}67$$

$$Y_{G4} = 0{,}67$$

$$Y_{G5} = 0{,}67$$

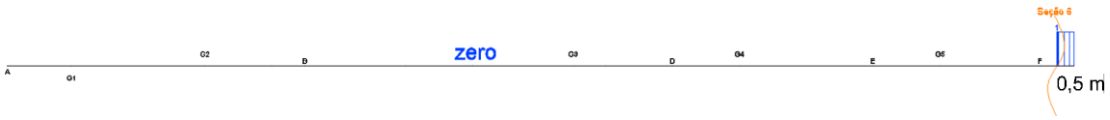
$$Y_{Balanço}$$

A seção 5 é um caso atípico, onde a seção está localizada em cima do apoio, nesta situação calcularemos a linha de influência à esquerda, que estará em balanço se prolongando ao trecho de ordem I.

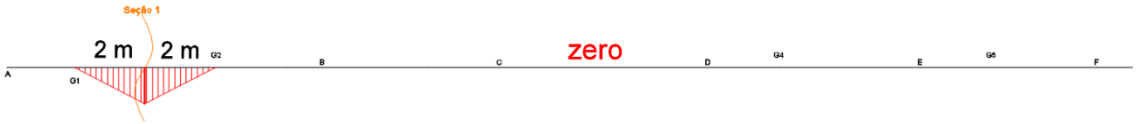


$$Y_{Balanço} = -0{,}33$$

Já a seção 6 localiza-se sob um balanço, contudo ele é de ordem I e não se prolongará ao demais trechos:



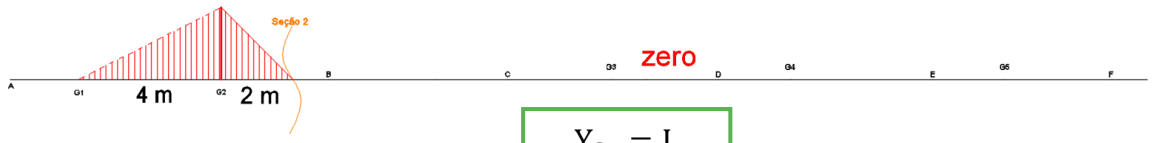
Agora, calcularemos os momentos nas seções. Quanto a questão de propagar- se será a mesma dos cortantes. O momento na seção 1 é calculado utilizando a fórmula da situação 3.



$$Y_{S1} = \frac{2 \times 2}{2+2}$$

$$Y_{S1} = 1$$

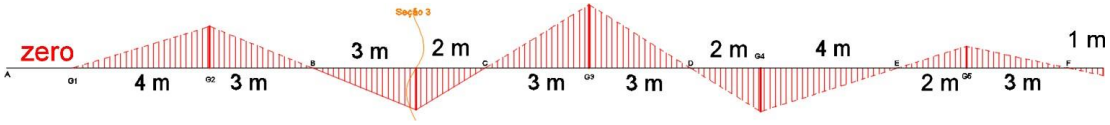
Para a seção dois, temos a viga em balanço, sendo nula nos trechos a direita e propagando-se até o final do trecho sem estabilidade.



$$Y_{G2} = L$$

$$Y_{G2} = -2$$

Seção 3 é o caso da viga bi apoiada em trecho com estabilidade propagando-se aos demais.



$$Y_{S3} = \frac{3 \times 2}{3 + 2}$$

$$Y_{S3} = 1{,}2$$

$$Y_{G2} = -1{,}2$$

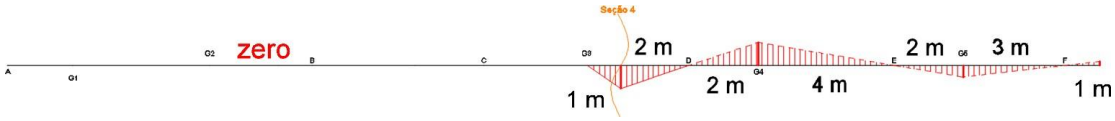
$$Y_{G3} = -1{,}80$$

$$Y_{G4} = 1{,}2$$

$$Y_{G5} = -0{,}60$$

$$Y_{Balanço} = 0{,}2$$

Trecho sem estabilidade propagando-se para os trechos de menor ordem é a situação da seção 4.



$$Y_{S4} = \frac{2 \times 1}{2 + 1}$$

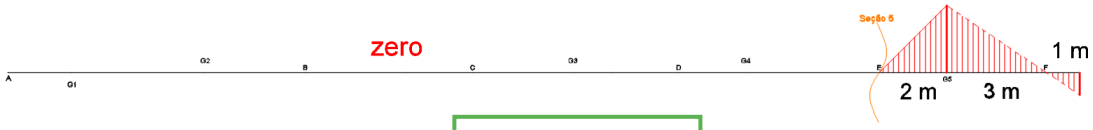
$$Y_{S4} = 0{,}67$$

$$Y_{G4} = -0{,}67$$

$$Y_{G5} = 0{,}33$$

$$Y_{Balanço} = -0{,}11$$

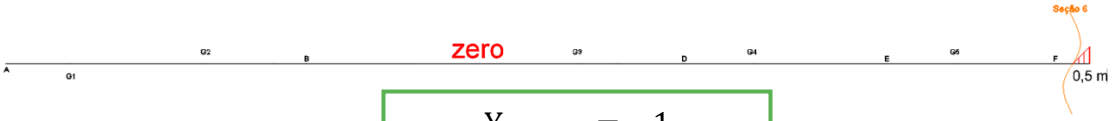
Para a seção 5, diferente do cortante, o momento não se altera pelo fato da seção estar localizada em cima do apoio, será considerado o caso de uma viga em balanço com engaste à esquerda.



$$Y_{G5} = -2$$

$$Y_{Balanço}$$

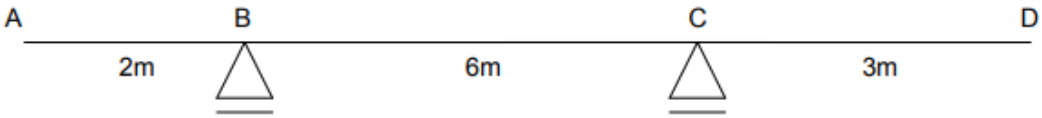
Por fim, a seção 6 é a situação do engaste à esquerda.



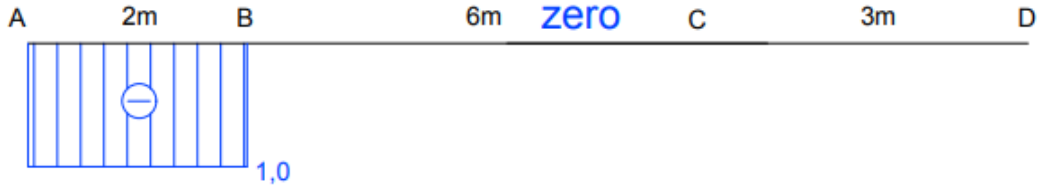
$$Y_{Balanço} = -1$$

Obs: Quando uma seção está sobre um apoio, seguido de balanço, na LI do esforço cortante teremos duas LI distintas, uma LI de cortante à esquerda e uma LI de cortante à direita.

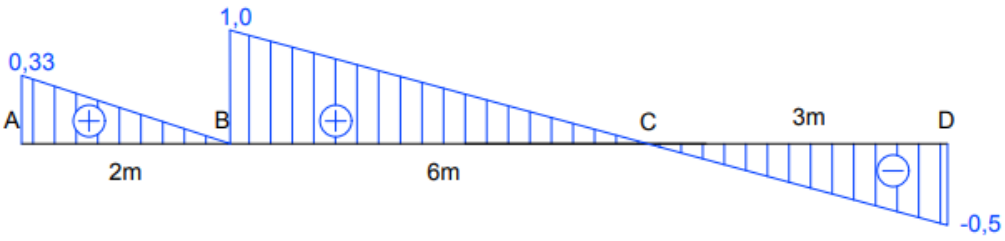
Exemplo



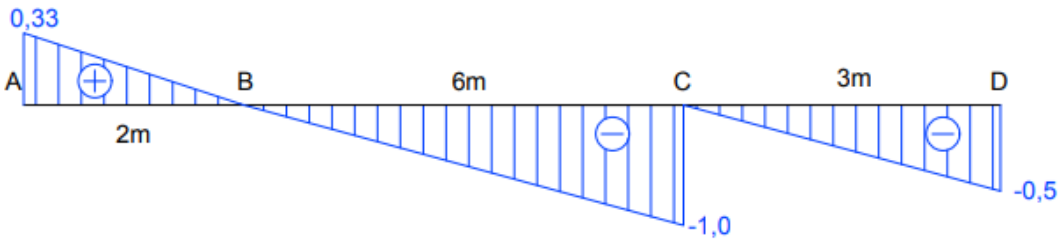
LI de V_B esquerda



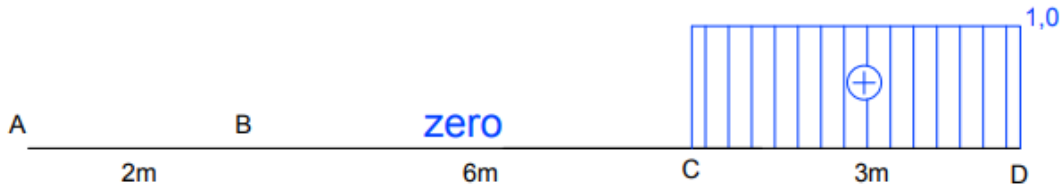
LI de V_B direita



LI de V_C esquerda



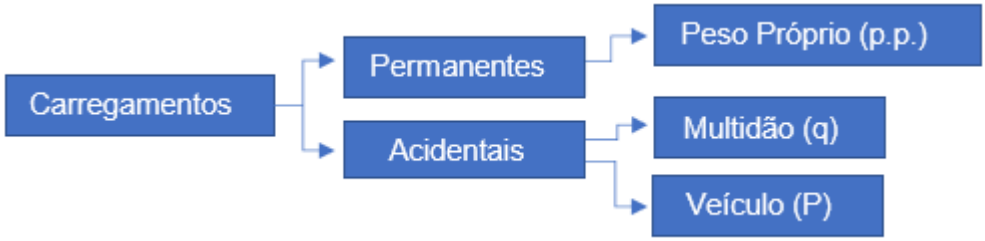
LI de V_C direita



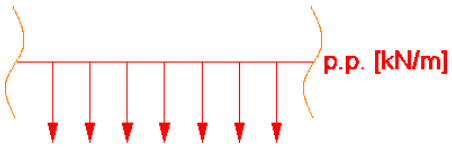
Trem-Tipo

Após conhecimento das linhas de influência, iremos definir o trem-tipo. Trem-tipo é um conjunto de carregamentos que deve ser aplicado na estrutura em seu ponto mais desfavorável a partir das linhas de influência. O trem-tipo é composto por carregamentos móveis, sendo eles formados pela carga de veículos e a carga de multidão cuja classe é definida pela NBR 7188.

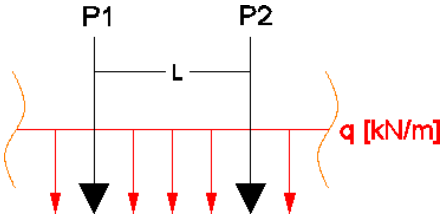
Dentre os carregamentos, para esta situação dividiremos em:



Permanentes:



Acidentais:



Ao realizarmos o cálculo com o trem-tipo, o objetivo é obter o valor do máximo esforço positivo – dependendo da situação é considerado o mínimo esforço negativo – e obter o valor do máximo esforço negativo – em alguns casos será o mínimo esforço positivo. As cargas P1 e P2 seriam os equivalentes as rodas do veículo, para obter o local de onde aplicar as forças acidentais, o valor da maior carga deverá ser colocado na maior ordenada e a outra carga deverá ser verificado qual o lado (esquerda ou direita) de maior ordenada. Para seu

valor, deverá ser feito a semelhança de triângulos como realizado na situação 4 de Linha de Influência.

O cálculo total leva em conta as seguintes situações: a parcela do peso próprio multiplicado pela soma das áreas positivas e negativas; para o máximo esforço positivo, é somado à parcela do peso próprio a carga de multidão multiplicado pela área positiva e a carga do veículo multiplicada pelo valor da ordenada Y aplicada; já para calcularmos o máximo esforço negativo, é calculado a carga de multidão multiplicado pela área negativa e a carga pontual multiplicada pelo valor da ordenada Y aplicada.

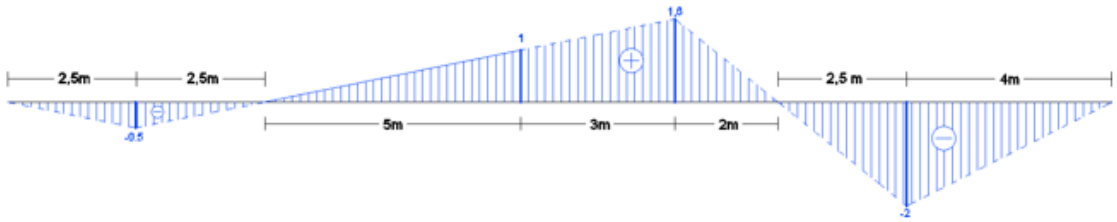
$$E^{+}_{máx} = p \cdot p \times (\text{Área Positiba} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Positiva}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$E^{-}_{máx} = p \cdot p \times (\text{Área Positiba} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Negativa}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

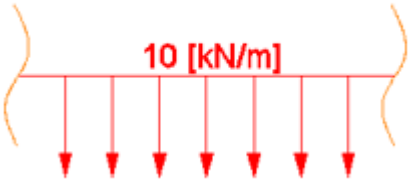
Exemplo:

1) Dado a Linha de Influência e o Trem-Tipo, obtenha os esforços cortantes máximos e mínimos e a posição do Trem-Tipo.

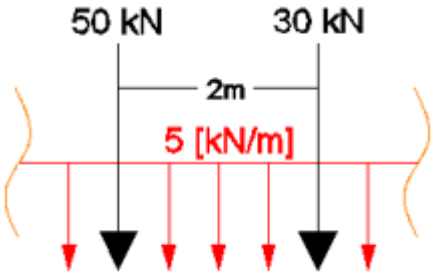
LI de R_A



Peso Próprio



Trem-Tipo



Primeiramente, vamos posicionar o trem-tipo para a posição mais desfavorável, tanto para o Esforço Cortante Máximo Positivo e Negativo. Para o positivo, verificamos que o maior valor da ordenada é de 1,6, portanto posicionaremos a carga de 50 kN nesta ordenada. O próximo passo é posicionar a carga de 30 kN distanciando os dois metros da primeira carga para a esquerda ou para a direita, realizamos o cálculo pela semelhança de triângulos:

Esquerda:

$$\frac{1,6}{8} = \frac{Y}{6}$$

$$Y = 1,2$$

Direita:

A carga será posicionada no $Y = 0$

Portanto, a posição da carga de 30 kN do trem-tipo será à esquerda. Agora calcularemos para a parte negativa, o maior valor em módulo da ordenada é o valor 2, portanto é onde a carga de 50kN será posicionada. Por semelhança de triângulos, verificaremos se a pior situação é onde a carga se situa à esquerda ou à direita:

Esquerda:

$$\frac{-2}{2,5} = \frac{Y}{0,5}$$

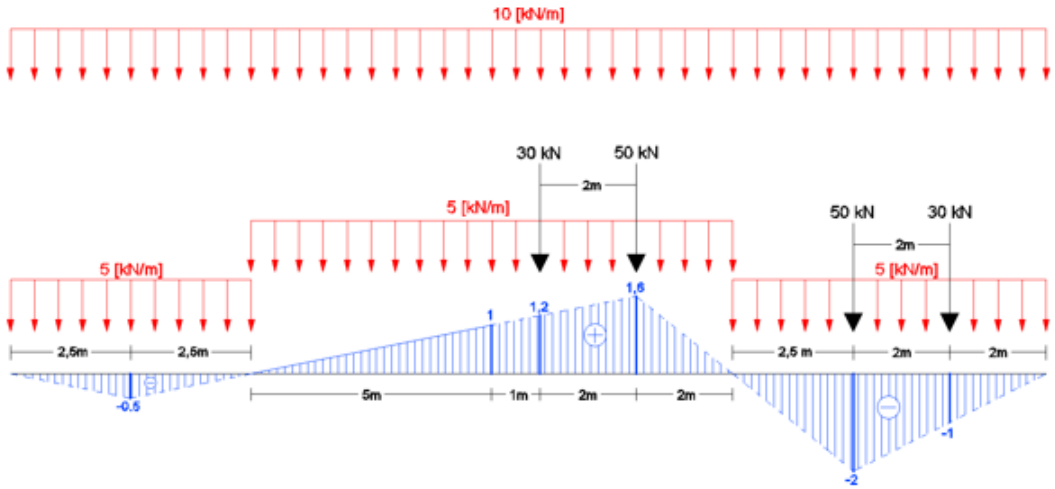
$$Y = -0,4$$

Direita:

$$\frac{-2}{4} = \frac{Y}{2}$$

$$Y = -1$$

Conhecendo as ordenadas de ambos os casos, posicionaremos o trem-tipo e em seguida realizaremos os cálculos dos esforços.



$$V_{A_{máx}}{}^{+} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Positiva}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$V_{A_{máx}}{}^{+} = 10 \times \left(\frac{1{,}6 \times 8}{2} + \frac{1{,}6 \times 2}{2} - \frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 4}{2}\right) + 5 \times \left(\frac{1{,}6 \times 0{,}8}{2} + \frac{1{,}6 \times 2}{2}\right) + 50 \times 1{,}6 + 30 \times 1{,}2$$

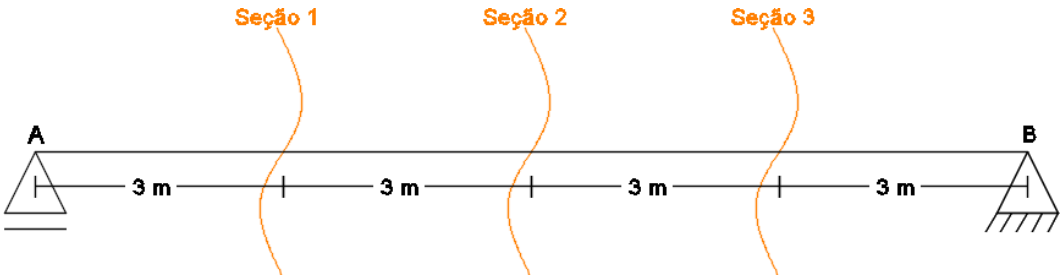
$$V_{A_{máx}}{}^{+} = 158{,}5$$

$$V_{A_{máx}}{}^{-} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Negativa}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

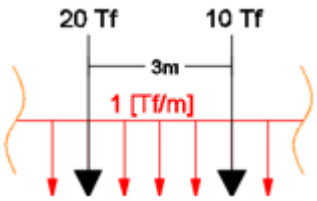
$$V_{A_{máx}}{}^{-} = 10 \times \left(\frac{1{,}6 \times 8}{2} + \frac{1{,}6 \times 2}{2} - \frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 4}{2}\right) + 5 \times \left(-\frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{0{,}5 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 2{,}5}{2} - \frac{2 \times 4}{2}\right) + 50 \times 2 + 30 \times 1$$

$$V_{A_{máx}}{}^{-} = -166{,}25$$

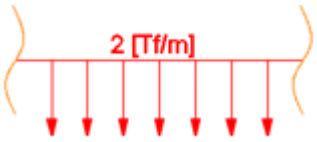
2) Obtenha a envoltória, esforços máximos e mínimos do Momento Fletor para a viga abaixo nas seções indicadas.



Trem-Tipo

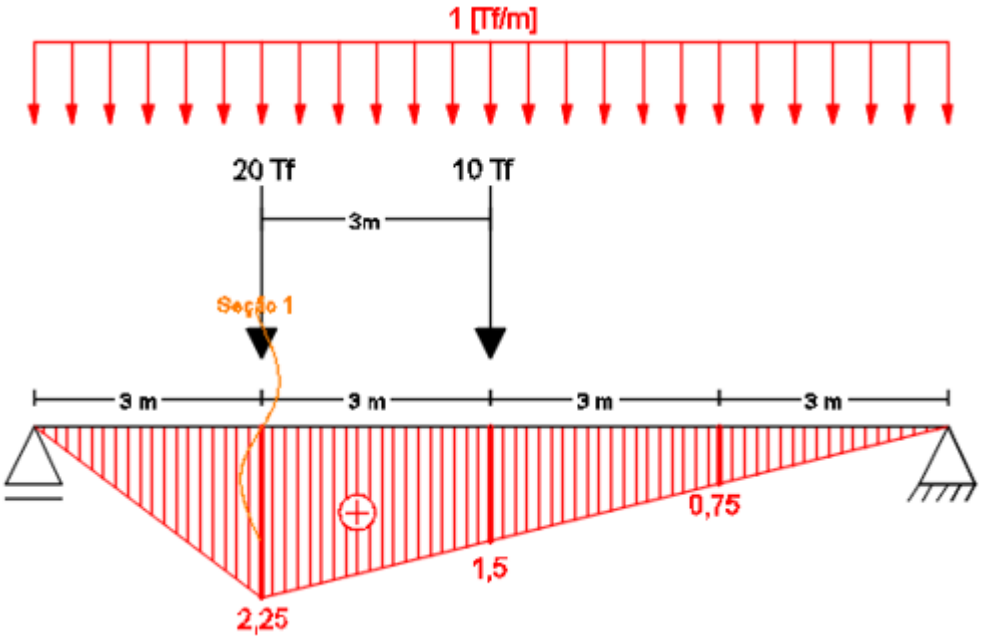


Peso Próprio



Traçaremos as linhas de influência da viga simplesmente apoiada para as seções 1, 2 e 3. Após, colocaremos o trem-tipo nos pontos críticos e a carga de multidão, por fim calcularemos o máximo momento fletor positivo e negativo.

O ponto crítico é na própria seção 1, portanto posicionaremos a maior carga e decidiremos se a segunda é posicionada na esquerda ou direita, neste caso, caso fosse à esquerda seria 0 a ordenada, assim posicionamos o trem tipo à direita e calculamos a sua ordenada no ponto.



$$M_{S1_{máx}}{}^{+} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Positiva}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$M_{S1_{máx}}{}^{+} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right) + 20 \times 2{,}25 + 10 \times 1{,}5$$

$$M_{S1_{máx}}{}^{+} = 100{,}5 \text{ Tf.m}$$

$$M_{S1_{máx}}{}^{-} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Negativa}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

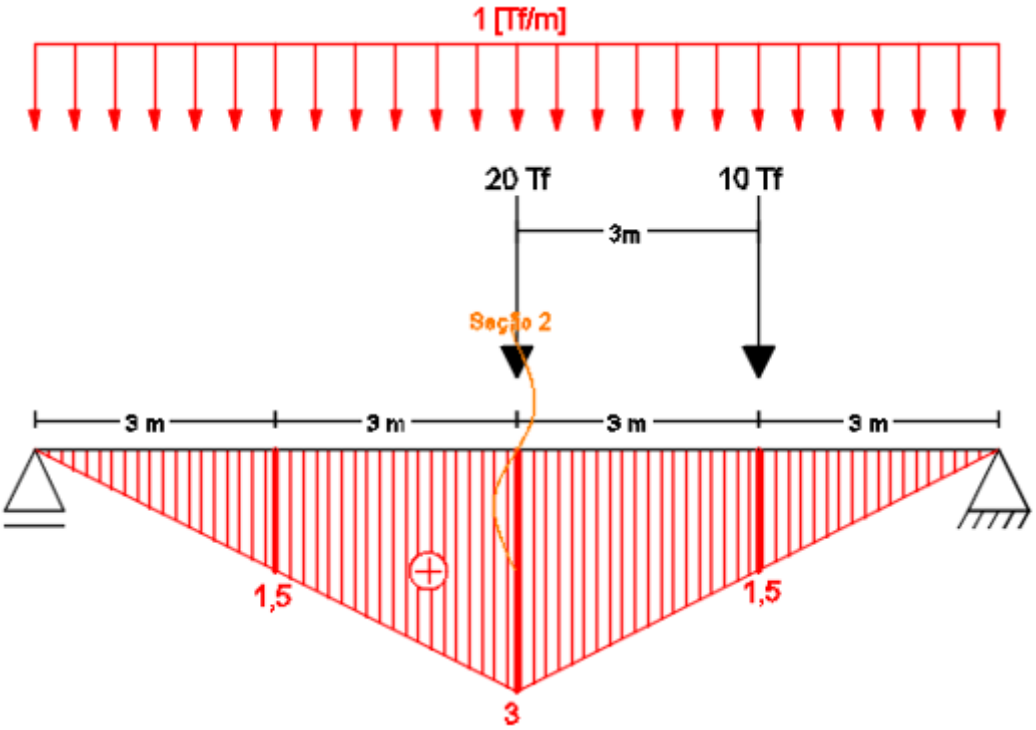
$$M_{S1_{máx}}{}^{-} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right)$$

$$M_{S1_{máx}}{}^{-} = 27 \text{ Tf.m}$$

Nesta situação, não será máximo negativo e sim mínimo positivo.

$$M_{S1_{mín}}{}^{+} = 27 \text{ Tf.m}$$

Para a segunda seção, o ponto mais crítico também ocorre na própria seção, portanto posicionaremos o trem-tipo neste ponto e verificamos a posição da segunda carga, nesta situação ambas as posições dão o mesmo resultado.



$$M_{S2_{máx}}{}^{+} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Positiva}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$M_{S2_{máx}}{}^{+} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right) + 20 \times 2{,}25 + 10 \times 1{,}5$$

$$M_{S2_{máx}}{}^{+} = 100{,}5 \text{ Tf.m}$$

$$M_{S2_{máx}}{}^{-} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Negativa}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

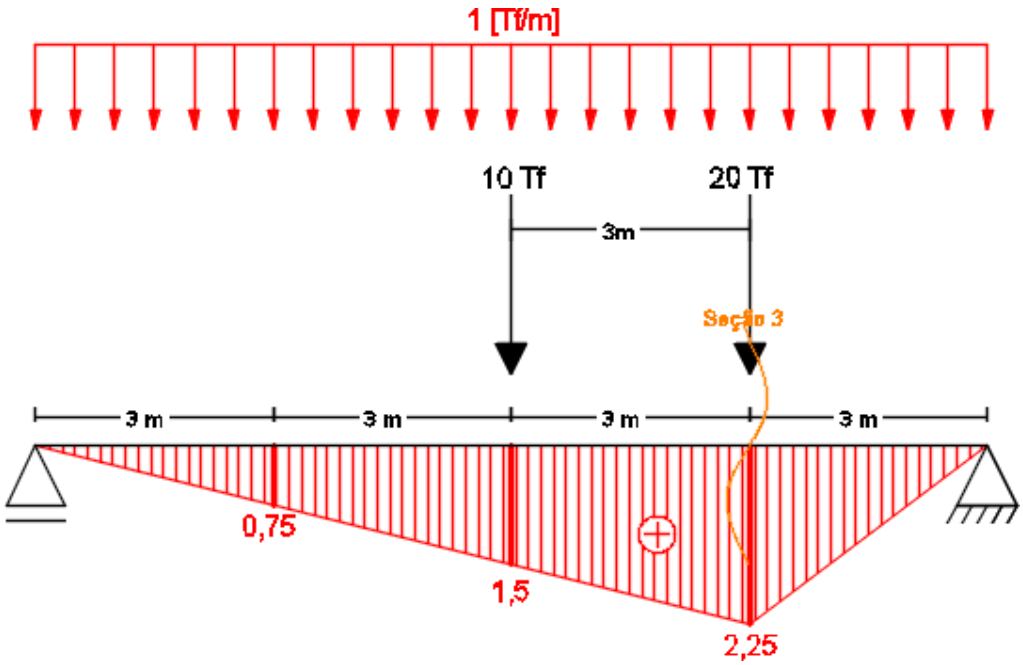
$$M_{S1_{máx}}{}^{-} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 3}{2} + \frac{2{,}25 \times 9}{2}\right)$$

$$M_{S2_{máx}}{}^{-} = 36 \text{ Tf.m}$$

Nesta situação, não será máximo negativo e sim mínimo positivo.

$$M_{S2_{mín}}{}^{+} = 36 \text{ Tf.m}$$

Já na seção 3, ocorre o mesmo que a primeira seção, mas de maneira espelhada.



$$M_{S3_{máx}}{}^{+} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Positiva}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$M_{S3_{máx}}{}^{+} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 9}{2} + \frac{2{,}25 \times 3}{2}\right) + 1 \times \left(\frac{2{,}25 \times 9}{2} + \frac{2{,}25 \times 3}{2}\right) + 20 \times 2{,}25 + 10 \times 1{,}5$$

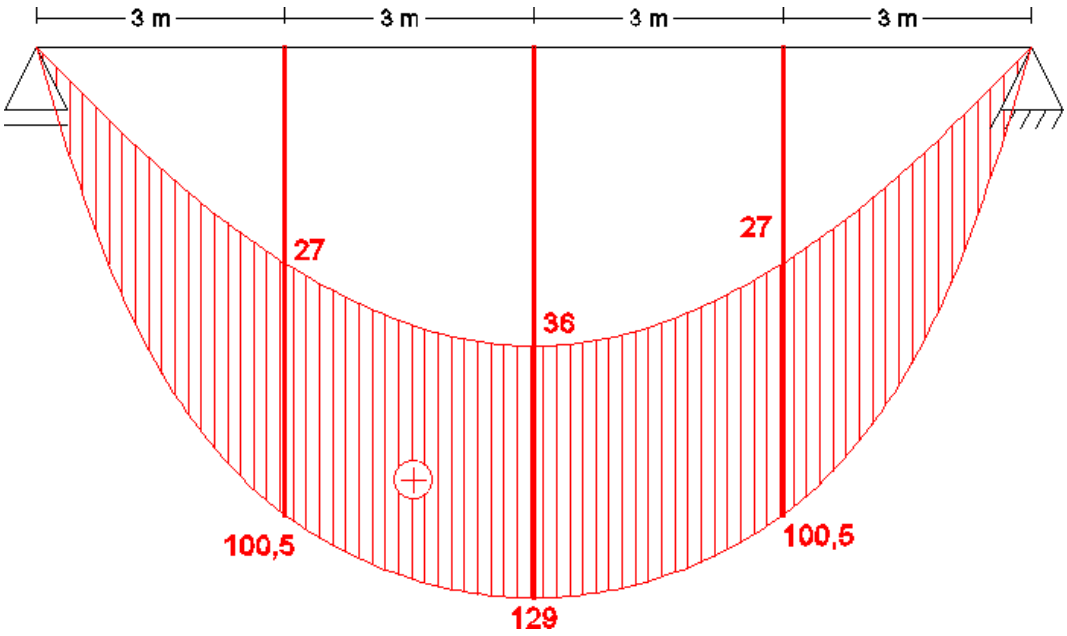
$$M_{S3_{máx}}{}^{+} = 100{,}5 \text{ Tf.m}$$

$$M_{S3_{máx}}{}^{-} = p.p \times (\text{Área Positiva} + \text{Área Negativa}) + q \times (\text{Área Negativa}) + \sum(P_i \times Y_i)$$

$$M_{S3_{máx}}{}^{-} = 2 \times \left(\frac{2{,}25 \times 9}{2} + \frac{2{,}25 \times 3}{2}\right)$$

$$M_{S3_{máx}}{}^{-} = 27 \text{ Tf.m}$$

Neste exemplo, introduziremos o último conceito desta apostila. A envoltória é um diagrama que indica o domínio da estrutura, a área de atuação dos esforços. Para obtê-lo, colocamos o momento com seus valores máximos e mínimos.


3 m
3 m
3 m
3 m
27
36
27
100,5
100,5
129